Escola Universitària
Politècnica de Mataró

Enginyeria Tècnica Industrial: Especialitat Electrònica Industrial

ESTUDIS I APLICACIÓ DE SISTEMES DE CONTROL PER RETORN D'ESTAT

FRANCISCO. JAVIER REYES VIVAS

JOAN TRIADÓ

PRIMAVERA 2009

Molts agraïments al meu professor ponent, sr. Joan Triadó, per la seva dedicació i la seva ajuda, les quals han permès que el projecte continués endavant.

Resum

L'objectiu d'aquests projecte consisteix a obtenir coneixements sobre les variables per retorn d'estat i, a partir d'aquestes, poder determinar qualsevol tipus de sistema,aplicat a qualsevol tipus de ciència, ja sigui a la Física (control sobre un pèndol invertit) com a l' Electrònica (control d'un motor).

Una vegada assolits els coneixements, es muntaran les diferents configuracions que es poden obtenir amb aquests sistemes mitjançant el software matemàtic "Matlab" i la seva plataforma de simulació multidomini anomenada "Simulink". També es farà ús del programa anomenat "Program CC" per veure diferents formes de configuració de sistemes.

Muntades les diferents configuracions dels sistemes, posteriorment es pretén aconseguir veure les respostes dels sistemes a partir de la utilització d'una eina digital, els d'observadors d'estat (complert i reduït).

Finalment, es farà una aplicació de forma pràctica sobre el control d'un motor, per tal que ens doni una resposta ràpida i estable. I es muntarà un observador per aconseguir visualitzar la resposta del sistema.

Resumen

El objetivo de este proyecto consiste en obtener conocimientos sobre las variables por retorno de estado y, a partir de ello, poder determinar cualquier tipo de sistema aplicado a cualquier tipo de ciencia, ya sea la Física (control sobre un péndulo invertido) como a la Electrónica (control de un motor).

Una vez adquiridos los conocimientos, ya se pueden montar las diferentes configuraciones que se pueden obtener con estos sistemas mediante el software matemático “Matlab” y su plataforma de simulación multidominio llamada “Simulink”. También se utilizará el programa “Program CC” para poder ver diferentes formas de configuración de los sistemas.

Montadas las diferentes configuraciones, posteriormente se pretende conseguir ver las respuestas de los sistemas a partir de la utilización de una herramienta digital, los observadores de estado (completo o reducido).

Finalmente, se hará una aplicación de forma práctica sobre el control de un motor, para obtener una respuesta rápida i estable. Y se montará un observador de estado para conseguir visualizar la respuesta del sistema.

Abstract

The main objective of this research is to get knowledge about control systems by State-Space and from that, can determinate any type of systems aplicated to any science, for example in Physics (control of an inverted pendulum) or Electronics (motor control).

When the mechanics are learned, then it can be built many different configurations that can be obtained with those systems by using the mathematic software “Matlab” and its simulation platform called “Simulink”. It also will be used “Program CC” for seeing different forms of the configuration of the systems.

After that, it is pretended to obtain the answers of the systems by using a digital tool, called State Observers (full-order or minimum-order).

Finally, a practical application will be done to know how fast and stable is the answer of the motor. Also, an observer will be built to check the system’s response.

DOCUMENT MEMÒRIA DESCRIPTIVA

ÍNDEX

1 Objectius

L'objectiu d'aquest projecte consisteix a realitzar un mètode d'anàlisi i modelat de sistemes basats en l'espai d'estat, ja que són els més adequats per al tractament de múltiples entrades i sortides, així com per al tractament de problemes amb paràmetres que varien en el temps o fins i tot amb sistemes no lineals.

Les tècniques de modelatge de sistemes en l' espai d'estat es basen en descriure els sistemes dinàmics a partir de "n" equacions diferencials de primer ordre per al cas de sistemes de temps continu, i "n" equacions en diferència per al cas de sistemes discrets. Aquests "n" equacions resultants es descriuen per mitjà d' una notació matricial (matriu A,B,C,D), cosa que simplifica la seva representació matemàtica:

La matriu A: hi ha les variables d'estat del sistema.

La matriu B: hi ha les variables d'entrada del sistema.

La matriu C: hi ha les variables de sortida del sistema

La matriu D: és la matriu en la qual l'entrada pot afectar a la sortida (normalment aquesta matriu és 0).

Forma de representació general:

$$\dot{x} = Ax+Bu$$
$$y = Cx+Dx$$

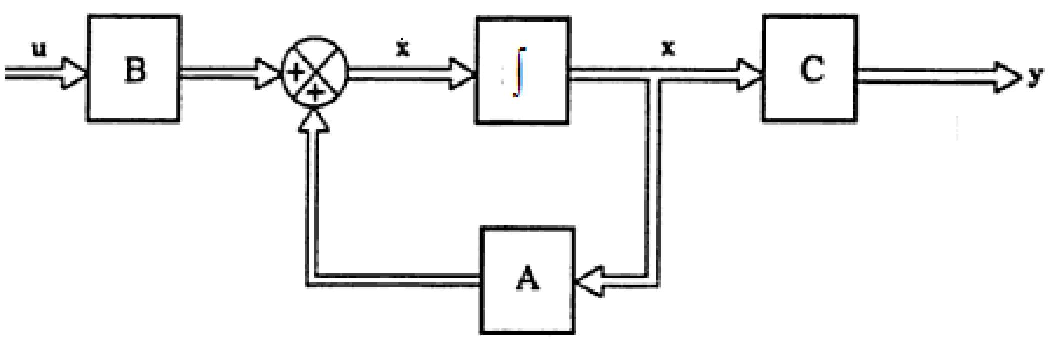


Figura I. Esquema general d'un sistema per retorn d'estat.

La idea d'estat és un concepte bàsic d'aquests sistemes que es podria definir com un instant donat caracteritzat per un cert conjunt de valors numèrics; i amb aquest conjunt de valors, juntament amb el valor de l’ entrada en l’instant actual, es pot determinar el valor que hi haurà a la sortida en l’instant següent.

Arribats aquí, es poden determinar les diferents configuracions per retorn d’estat que hi ha, i es representaran amb el Simulink, juntament amb els diferents observadors (que s’explicaran després) i, finalment, amb un exemple pràctic, amb el qual farem un control per retorn d’estat sobre un motor per tal d’obtenir la seva resposta mitjançant un observador.

2 Justificació del projecte

Aquests projecte té una motivació personal molt important ja que els meus coneixements en aquesta vessant no són prou amplis. Per tant, es un repte a aconseguir. També està l'eina Matlab, el qual es un punt a favor, ja que es una instrument utilitzant a tot al món, i tenir més coneixements d'aquests, pot ser favorable de cara al futur.A més, l'ús del control per retorn d'estat en aquests sistemes té un pes important en aquests projecte per les següents raons:

La utilització dels sistemes en l'espai d'estat amb una entrada i diverses sortides (és un dels avantatges més notoris que posseeixen aquests sistemes). Així mateix, hi haurà esquemes que tindran una entrada i una sortida, els quals també podran ser tractats mitjançant les variables d'espai estat.

Fent comparacions amb altres sistemes, per exemple un PID tradicional, s'observa que el PID utilitza la sortida per poder regular l'entrada (1 entrada, 1 sortida). En canvi, en el control per retorn d'estat, el regulador està en la realimentació, i aquesta realimentació no utilitza la sortida, sinó que utilitza l'estat per determinar les accions de control. Tot això permet un control molt més precís en les accions, atès que pot determinar les causes per les quals la sortida no aconsegueix el valor adequat, cosa que no és possible amb un regulador PID clàssic.

A continuació, es mostraran les diferents configuracions que podem obtenir amb un control per retorn d'estat. Aquests esquemes es presentaran mitjançant el Simulink de Matlab.

3 Configuracions de control per retorn d'estat

3.1 Retorn d'estat complert sense entrada.

Quan es fa referència a fer un control per retorn d'estat complert, es vol expressar que s'utilitzen les variables d'estat del sistema (totes les variables de què el sistema està composat), per aconseguir un control (una estabilitat) més precís d'aquest.

La configuració d'aquest sistema és senzilla, ja que s'ha de fer un control del sistema real a partir de l' equació característica desitjada per al sistema. En cas que el sistema fos de 2n ordre, l' equació desitjada tindria la forma següent:

$$(s-\mu_1)\cdot(s-\mu_2)=0$$

On μ_1, μ_2 =pols del sistema desitjat

L'equació la igualem a 0 perquè, en ser realimentacions, el que volem és eliminar l'error comès a la sortida. Per tant, quant menys error hi hagi, més precís serà el control sobre el sistema.

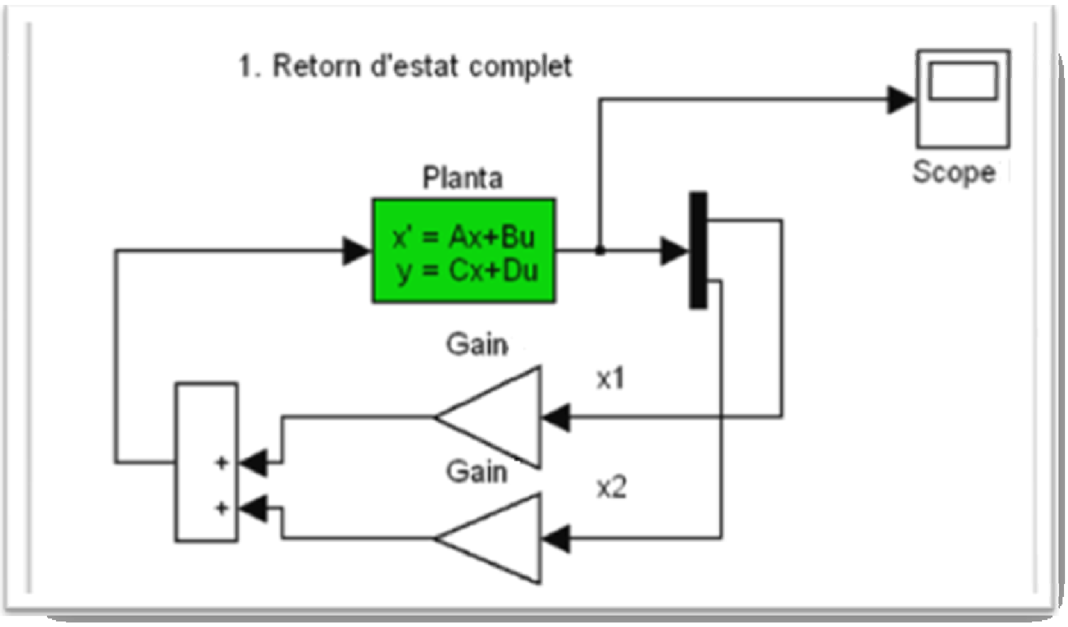


Figura II. Retorn d'estat complert sense entrada.

Per poder trobar les "K" del sistema es poden utilitzar diversos mètodes (Matlab, Program CC, etc.). La forma més entenedora i més fàcil per trobar-les és utilitzant el Matlab, el qual es regeix per les següents consignes:

- Definició de les matrius del sistema (A,B,C,D)

- Comprovació que les matrius són totalment controlables:

$$M = \left(B \ \mathrm{A*B} \right)$$

-Buscar el rang (Rank (m)). Si s'està comprovant una matriu 2x2, el rang ha de ser de dos (i ens indica que és possible controlar el sistema amb uns pols arbitraris). En cas contrari, significaria que la matriu no és controlable en la seva totalitat.

-Creació de l'equació característica desitjada (o es posa en forma matricial, i després, mitjançant la instrucció "poly", s'obté l'equació característica).

-Es munta l'equació característica del sistema (utilitzant la instrucció "polyvalm" (equació característica desitjada (phi), matriu A).

-I finalment, es troba la "K" del sistema utilitzant la fórmula d'Ackerman (K=[0 1]*inv(M)*Phi (valor del punt 4).

Exemple 1.Trobar les "K" del sistema :

<u>Matlab</u>

1) Definició de matrius del sistema
A=[0 1;20.6 0];
B=[0;1];
C=[1 0];
D=[0];

2) Matriu de controlabilitat
M=[B A*B];

3) Polinomi característic desitjat
J=[-1.8+2.4*i 0;0 -1.8-2.4*i];
jj=poly (J)
ans=
1.000   3.600   9.000 $\Rightarrow (s^2 + 3.6 * s + 9)$

4) Recerca del polinomi característic del sistema
Phi=polyvalm (jj,A);

5) Valors de "K" (fórmula d'Ackerman)
K=[0 1]*inv(M)*Phi
K=
29.600   3.600

Si es fa ús del programa "Program CC", les comandes necessàries per poder trobar les realimentacions del sistema (K) serien les següents:

<u>Program CC</u>

Definició de matrius. Una vegada definides, s'empaqueten les matrius en una conjunta (pack).

CC>a=[0 1;20.6 0];

CC>b=[0;1];

CC>c=[1 0];

CC>d=[0];

CC>pack

CC>p=pack(a,b,c,d)

Se sap que els pols desitjats del sistema son ([-1.8+2.4*j 0;0 -1.8-2.4*j]) en forma matricial. S'utilitza la funció "polplace" per trobar les "K" del sistema, juntament amb la matriu empaquetada d'aquest sistema i s'obté la "K".

CC>K= poleplace(p,[-1.8+2.4*j;-1.8-2.4*j])

K =

29,600000 3,6000000

(Nota*= Les condicions inicials d'aquest sistema estan configurades de la següent manera:

C.I.= [1 0])

Com es pot veure, aquests mètodes són dos sistemes diferents per trobar les realimentacions del sistema. Són vàlids tant l'un com l'altre (el resultat és el mateix).

Si es munta el circuit al Simulink (l'esquema anterior), obtenim la següent resposta:

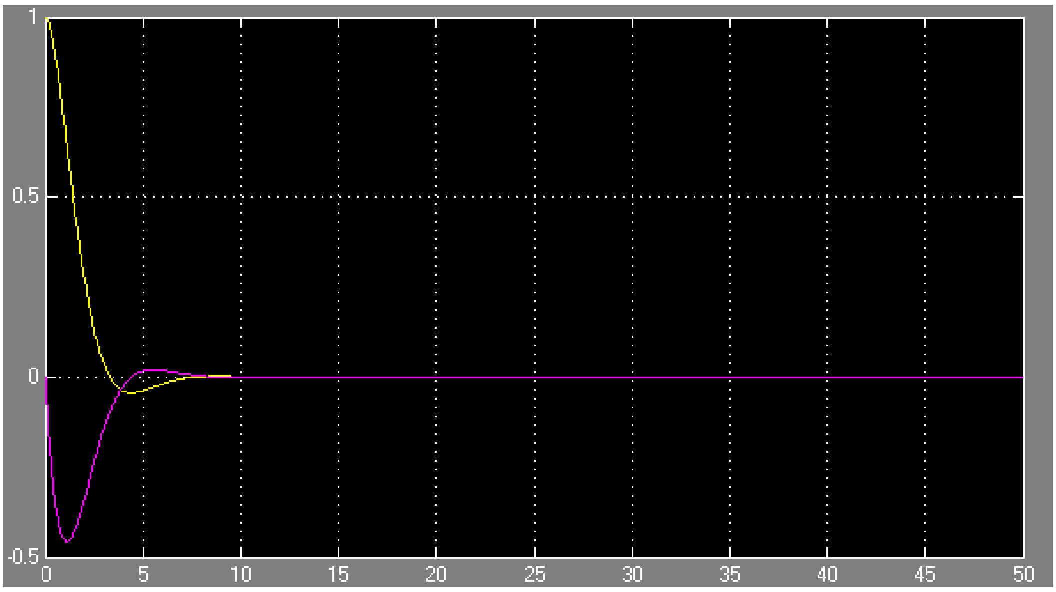


Figura III. Resposta en el temps del retorn d'estat complert sense entrada.

Com es pot veure en el gràfic, l'estabilitat d'aquest sistema comença a manifestar-se al voltant dels 8 segons. Les dues variables del sistema s'inicien en valors diferents (x1=1 i x2=0).

3.2 Retorn d'estat complet amb entrada (si ja té integradors)

El sistema és pràcticament igual a l'anterior. L'única diferència que hi ha és que s'introdueix un valor constant a l'entrada de la variable que es vol controlar.

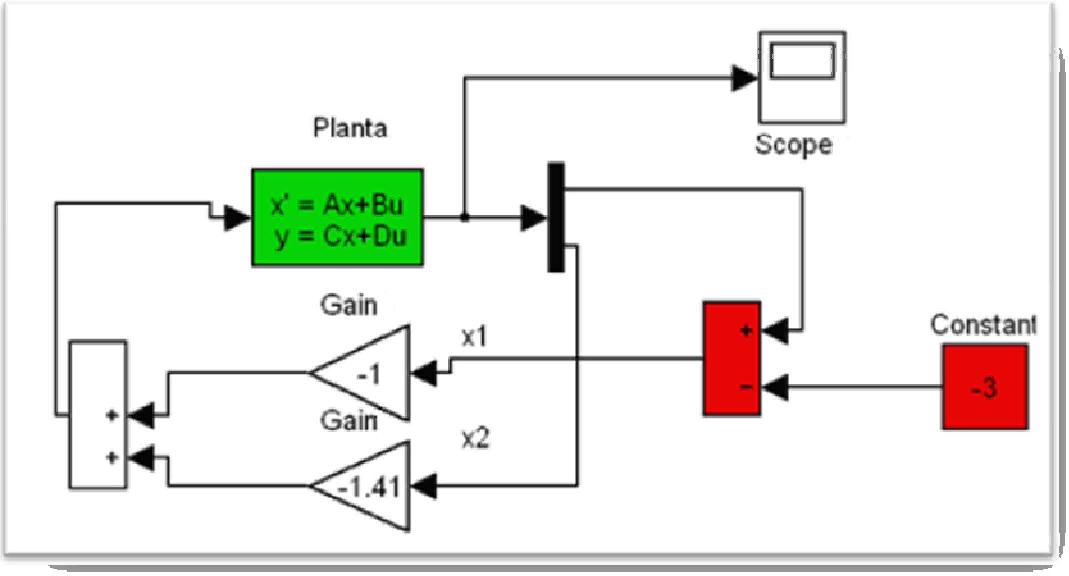


Figura IV. Retorn d'estat complert sense entrada (amb integració afegida).

Les equacions són les mateixes que en l'exemple anterior, el muntatge es pràcticament igual que en el darrer exemple i la resposta (obtinguda al Simulink) és la següent:

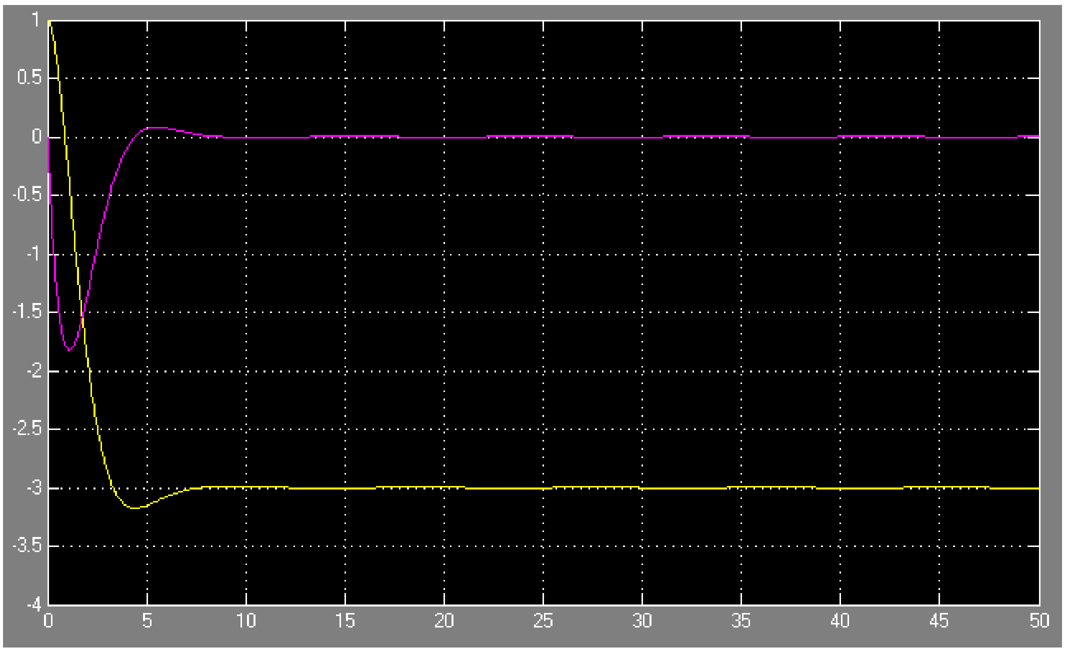


Figura V. Resposta temporal del sistema retorn d'estat complert sense entrada (amb integració afegida).

La resposta del paràmetre x_2 no ha variat. En canvi, com es pot observar, la variable x_1, ha tendit a estabilitzar-se al voltant del valor "-3" (que és el valor, en aquest exemple, que hi ha com a constant).Analitzant la gràfica de forma minuciosa, es pot apreciar que la variable x1 s'estabilitza una mica abans que la variable x_2 (x_1= al voltant dels 6-7 segons i x_2= al voltant dels 8 segons).Els sistema és bastant estable si es fa referència a les oscil·lacions.

3.3 Retorn d'estat complet amb entrada i integració afegida (tipus 0, és a dir, que no te integració abans de ser realimentat)

Sempre que a un sistema se li afegeixi una entrada consigna (una constant), haurà de tenir integradors. Els integradors tenen la funció de fer el sistema estable, sempre i quan el sistema no s'alimenti d'una resposta esglaonada, sinó d'una resposta en forma d'impuls.

Com saber si un sistema té integradors?

Es pot trobar de dues maneres:

Empíricament→S'alimenta el sistema en llaç obert per una entrada esglaó. Si la resposta obtinguda tendeix a infinit, significarà que hi ha algun integrador.

Analíticament→A partir del càlcul. Es construeixen les equacions d'estat del sistema a partir de les matrius i es relacionen amb el diagrama de blocs del sistema (funció de transf.).

A l'hora de fer el muntatge en el Simulink, s'haurà de tenir en compte que, quan es vulgui introduir una entrada consigna, s'haurà de sumar la realimentació i restar la consigna de la variable que es vulgui controlar [1].

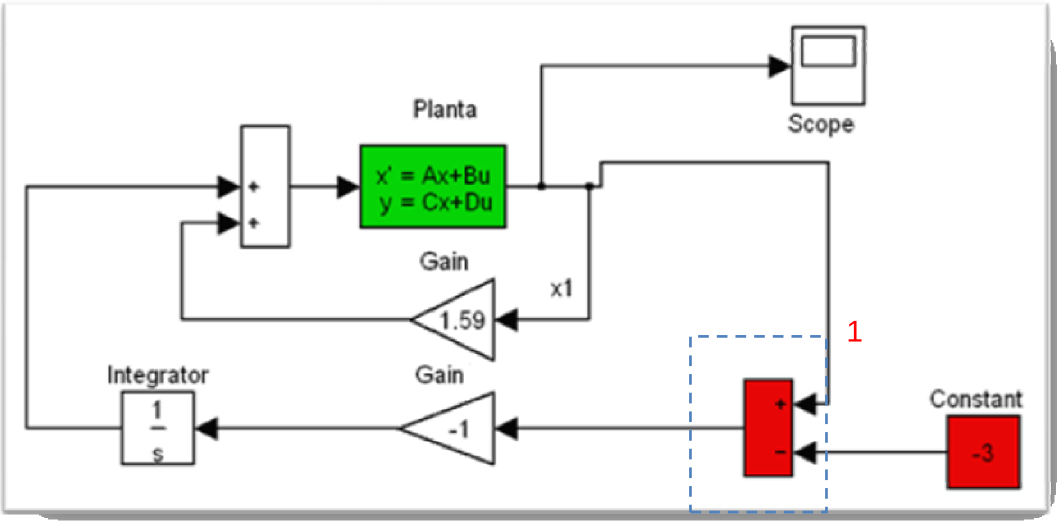


Figura IV. Retorn d'estat complert amb entrada (i integració afegida).

En aquest exemple, el sistema tractat és d'ordre 1 i de tipus 0 (sense integradors, s'ha fet la comprovació)

x'(t)=-3*x(t)+u(t)

y(t)=x(t)

El polinomi característic desitjat és s^2+1.41*s+1

Per poder fer el control amb integració, se'n farà una d'ampliació de les matrius existents en un grau més (tipus 1).

Exemple 2:

A=-3

B=1

C=1

D=0

An=(0,C;0,A)

Bn=(0;B)

Cn=(0,C)

Dn=D

(Nota*= A,B,C,D són les matrius primàries).

Una vegada s'han obtingut les matrius noves, es pot procedir a buscar la K del sistema.

Resposta del sistema

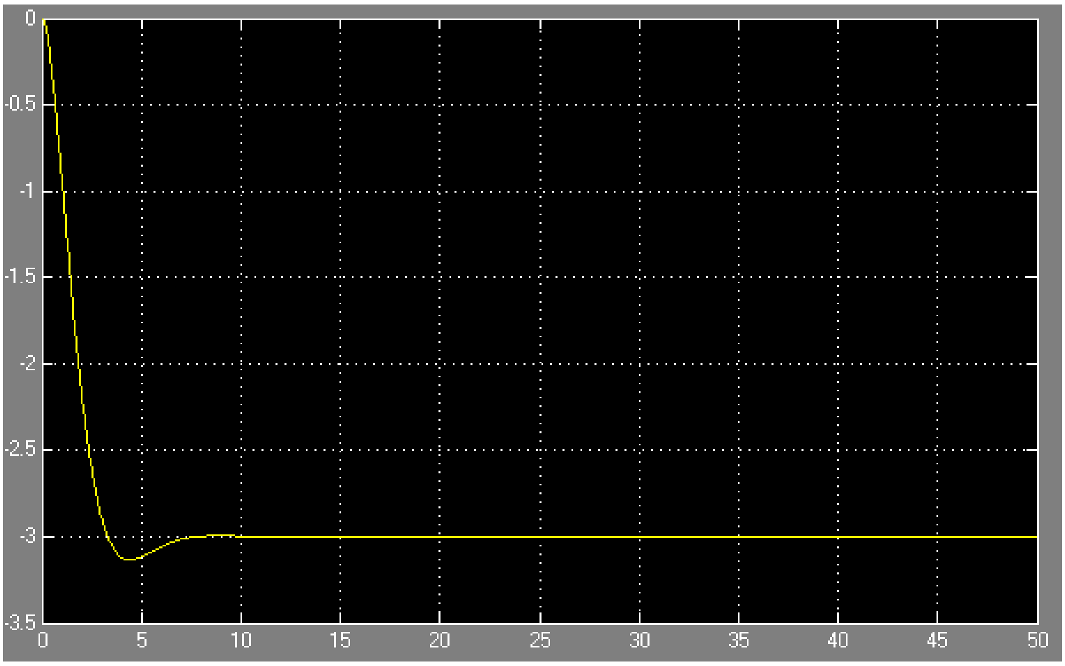


Figura V. Resposta en el temps del sistema retorn d'estat complert amb entrada (i integració afegida).

L'estabilització del sistema es produeix al voltant dels 10 segons. Quan el senyal arriba a la consigna desitjada (-3), s'observa que hi ha una petit amortiment que dura un 3-4 segons, aproximadament. Després, el senyal s'estabilitza en el valor desitjat.

3.4 Retorn d'estat complet amb entrada i integració afegida (però ara es té un sistema de 2n ordre)

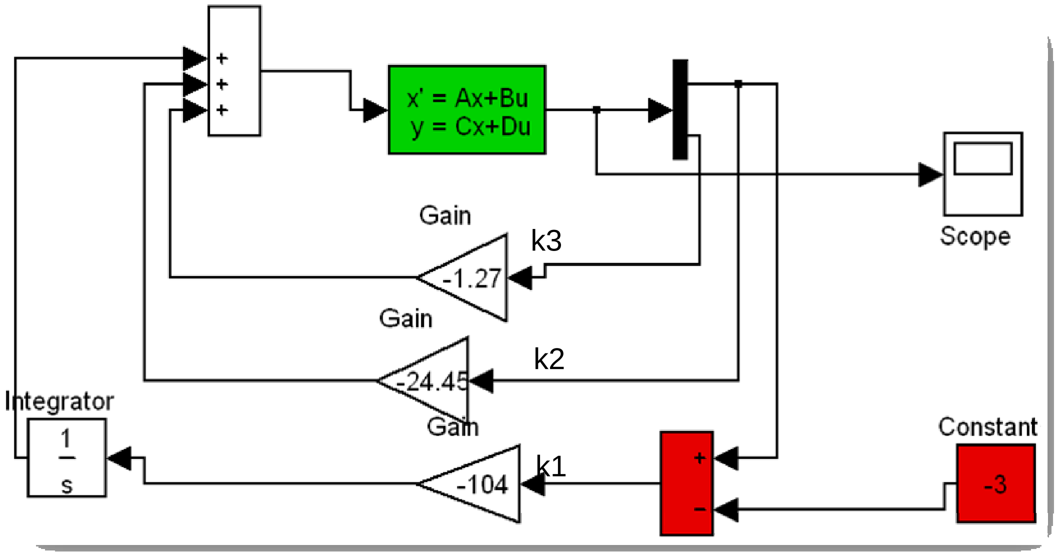


Figura VI. Retorn d'estat complert amb entrada (i integració afegida, en un sistema de 2n ordre).

Exemple 3:

El sistema és de primer ordre de tipus zero (sense integradors):

$x'_1(t)= x_2(t)+u(t)$

$x'_2(t)= -x_1(t)-3*x_2(t)+2*u(t)$

$y(t)=x_1(t)$

Els pols desitjats del sistema són $s_{1,2}$=-5±j i s_3=-20 (com que hi haurà una ampliació de les matrius (augmentarà un ordre), s'haurà de buscar un altre pol (en aquest cas, "-20")):

<u>Matrius antigues:</u>

A=(0,1;-1,-3)

B=(1;2)

C=(1,0)

D=(0)

Matrius noves:

An=(0,C;0,A)

Bn=(0;B)

Cn=(0,C)

Dn=D

Com es pot veure, hi ha un canvi en les matrius importants. A més, s'ha de fer una adaptació de les matrius. És a dir, si es canvien les matrius “a” i “b” (són les matrius importants del sistema), s'hauran d'adaptar a aquestes les matrius “c” i “d” (amb matriu identitat (en el cas de “c”) i amb zeros (en el cas de “d”)).

Es fa el càlcul a Matlab:

a=[0,1,0;0,0,1;0,-1,-3];

b=[0;1;2];

c=[0,1,0];

d=[0;0;0];

m=[b a*b a^2*b];

Rank (m)

ans =3 (controlable totalment)

J=[-5+j 0 0;0 -5-j 0;0 0 -20]; (pols desitjats)

jj=poly (J);

phi= polyvalm (jj,a);

k=[0 0 1]*inv(m)*phi (fórmula d'Ackerman)

k =

104.00   24.4545   1.2727

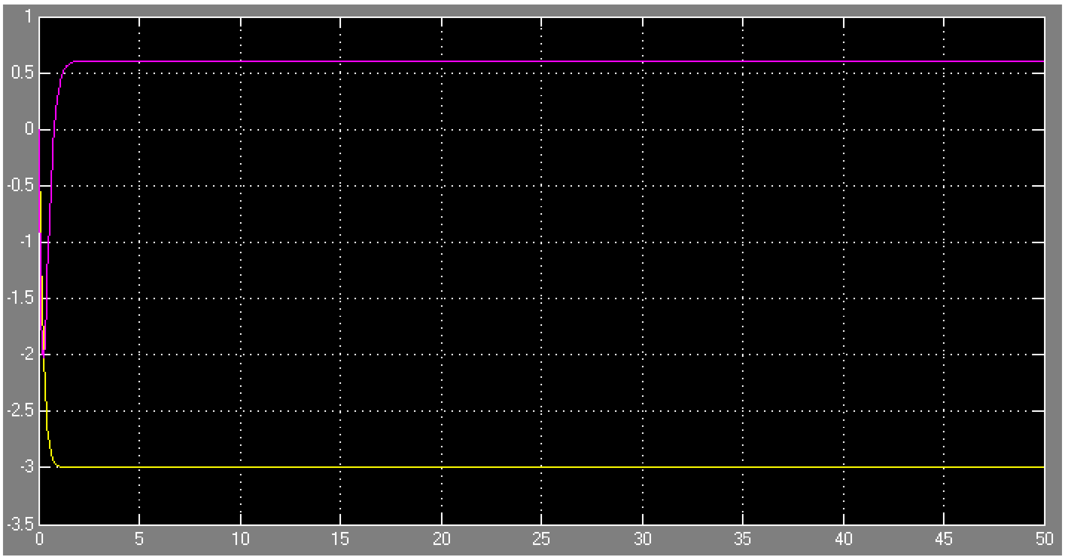


Figura VII. Resposta en el temps del sistema retorn d'estat complert amb entrada (i integració afegida, en un sistema de 2n ordre).

Apareixen dues respostes del sistema. La que s'ha vist en l'exemple anterior i la nova resposta que surt de zero, que fa una resposta inicial esmorteïda fins a un valor una mica més del valor "-2", i després, puja fins a "0.6" per ,finalment, estabilitzar-se.

4 Sistemes amb observadors

Totes aquests es són les possibles configuracions amb què es poden trobar els sistemes, i les maneres per trobar les seves realimentacions. Una vegada es té el control del sistema, potser és necessari que es vegi quina és l’evolució d’una variable d’aquest sistema. O potser es vol saber com serà l’estat d’una variable en introduir-hi unes condicions concretes. Per poder resoldre tots aquests dubtes, es necessita algun tipus “d’eina” que es pugui utilitzar per poder solucionar aquests problemes. Una solució seria posar un sensor i mesurar directament la variable. Una altra solució, que s’intentarà explicar a continuació, és utilitzar **observadors/estimadors.**

Quan s’utilitzen observadors, l’únic objectiu al qual es vol arribar és poder veure l’evolució d’una o d’unes variables concretes del sistema. El que fa l’observador és “predir” quins canvis tindrà la variable a observar (per tant, això vol dir que, a l’hora de fer l’observador, s’haurà de tenir en compte que per poder veure la resposta de la variable de forma anticipada, els pols de l’observador han de ser molt més ràpids que els del sistema (normalment 3 i 4 vegades més ràpids (més negatius))).

<u>Com ho fa</u>?

Per poder obtenir l’observador, simplement el que es fa és establir unes matrius de la mateixa manera que el sistema real, però amb petites modificacions, per tal de veure les variables que volem observar (modificacions per tal d’establir compatibilitats entre les matrius; però, en essència, la matriu és la mateixa per al sistema real i per a l’observador).

<u>Com es pot saber si l’observador treballa en sincronia amb el sistema real?</u>

L’observador, tal com el sistema real, tindrà unes realimentacions per tal que el sistema de l’observador tingui una estabilitat. Aquestes realimentacions vindran donades per la sortida de l’observador i la sortida del sistema real (amb això, es pot trobar l’error). També es tindrà un control sobre l’observador a partir de la consigna d’entrada del sistema real (u). Amb aquests valors, l’observador pot treballar sobre el sistema de manera exacta i precisa.

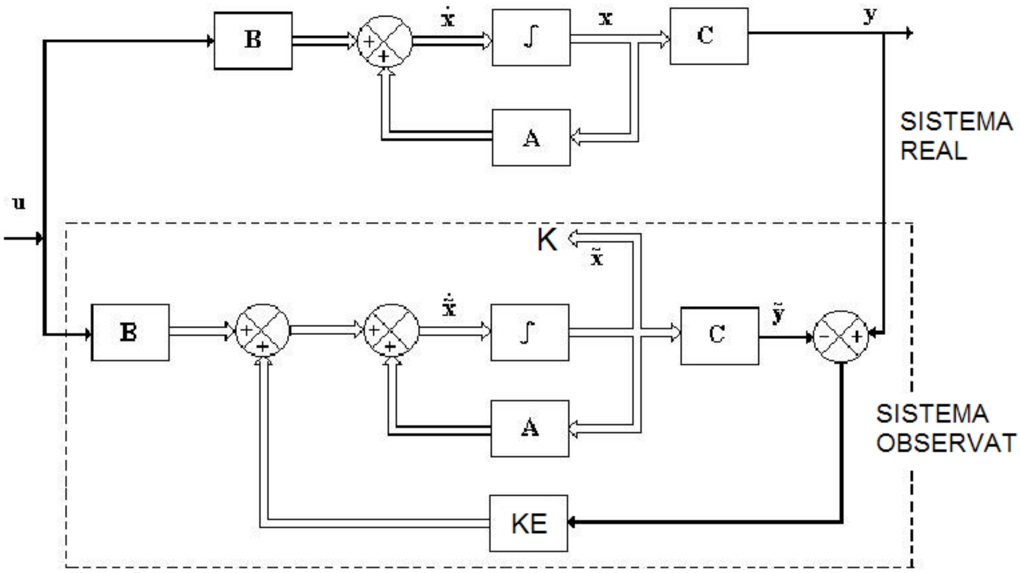


Figura VIII. Esquema general format per un sistema real i un observador complert.

Equacions generals del sistema:

$\dot{x}$ = Ax+Bu
y = Cx+Dx

Les matrius A,B,C,D són les mateixes tant per al sistema real com per al sistema observat. Pel que fa als càlculs, s'assumeix que el valor de D és zero.

La diferència existent entre x i $\overline{x}$ s'anomena error d'observació, i el terme $K_e(y-\overline{y})$ s'anomena factor de correcció.

Per determinar l'error d'observació restem $\dot{x}-\dot{\overline{x}}$. Així:

$$\dot{x}-\dot{\overline{x}} = (Ax+Bu)-(A\overline{x}+Bu+K_e(y-\overline{y}))$$
$$\dot{x}-\dot{\overline{x}} = Ax-A\overline{x}-K_e(Cx-C\overline{x})$$
$$\dot{x}-\dot{\overline{x}} = A(x-\overline{x})-K_eC(x-\overline{x})$$
$$\dot{x}-\dot{\overline{x}} = (A-K_eC)(x-\overline{x})$$

L'error està definit com la diferència entre l'estat real i l'estat estimat:

$$e = x - \overline{x}$$
$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\overline{x}}$$
$$\boxed{e = (A-LC)\cdot e}$$

Amb aquesta expressió es pot conèixer la dinàmica i l'estabilitat del sistema. Si la matriu $\left|A - LC\right|$ és estable, aleshores l'observador farà bé la seva feina i, donada qualsevol condició inicial, el sistema tindrà error zero.

L'elecció de correctes valors per al vector d'observabilitat K_e, farà possible que la dinàmica del vector d'error sigui asimptòticament estable i suficientment ràpid per tendir cap a zero.

L'estabilitat asimptòtica i la velocitat de resposta de la dinàmica de l'error estan determinades mitjançant els autovalors de la matriu $\left|A - LC\right|$, donats pel polinomi característic $\left|sI - A + LC\right|$.

Així mateix, hi ha unes condicions necessàries, les quals consisteixen en què el sistema obtingut sigui estable i completament controlable i observable (tot això es podrà comprovar amb les matrius de controlabilitat i observabilitat).

Exemple 4.Trobar l'equació característica

Sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

El sistema és d'ordre 2 (això es pot comprovar amb la funció "rank" de Matlab o Program CC), i és de suposar que l'observador també serà d'ordre 2 i es podrà definir com:

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \end{bmatrix}$$

El polinomi característic estarà donat per:

$$[sI - A + LC] = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & K_{e1} \\ 0 & K_{e2} \end{bmatrix}$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 2 + K_{e1} \\ -1 & s + 4 + K_{e2} \end{bmatrix}$$

$$[sI - A + LC] = s(s + 4 + K_{e2}) + (2 + K_{e1})$$

$$[sI - A + LC] = s^2 + (4 + K_{e2})s + (2 + K_{e1})$$

Fet això, s'exposaran a continuació metodologies de càlcul per trobar les realimentacions de l'observador (K_e).

4.1 Mètode de disseny d'observador complert (forma abreujada)

Els valors obtinguts anteriorment de l'observador (K_{e1}, K_{e2}) estan condicionats pels valors de les arrels del polinomi que, alhora, estan condicionades per les característiques amb què es vol que treballi el sistema. Per tant, es poden escollir les arrels de tal manera que es pugui controlar la resposta del sistema en llaç tancat.

Així doncs, es poden donar valors a les arrels del polinomi (μ_1, μ_2) a fi d'obtenir una resposta estable. Seguidament, per equivalència, es troben els valors de les incògnites.

Exemple 5:

Polinomi característic: $s^2 + (4 + K_{e2})s + (2 + K_{e1})$

Pols desitjats del sistema: -4 i -3

Les arrels del polinomi són:

$\mu_1 = -4$ i $\mu_2 = -3$

Per tant:

$(s-\mu_1)(s-\mu_2) = (s+4)(s+3) = s^2 + 7s + 12$

Després per equivalència tenim que $\Rightarrow \left|sI - A + LC\right| = s^2 + 7s + 12$

$\left|sI - A + LC\right|$ = polinomi característic (a partir de la matriu d'estabilitat)

Llavors:

$s^2 + (4+K_{e2})s + (2+K_{e1}) = s^2 + 7s + 12$

$$\text{on} \begin{cases} s^2 = s^2 \\ (4+K_{e2})s = 7s \Rightarrow K_{e2} = 3 \\ (2+K_{e1}) = 12 \Rightarrow K_{e1} = 10 \end{cases}$$

Llavors, sabent aquest mètode, es pot generalitzar de la següent manera:

Si es té que $[\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3 \ldots \ \mu_n]$ són els autovalors desitjats per a la matriu de l'observador $\left|A-K_eC\right|$, aquesta forma el polinomi característic:

$$(s-\mu_1)\ (s-\mu_2)\ (s-\mu_3) \ldots (s-\mu_n)$$

Aquest polinomi s'iguala al polinomi característic original $\left|sI-A+K_eC\right|$, creant l'equivalència entre termes:

$$\left|sI-A+K_eC\right| = (s-\mu_1)(s-\mu_2)\ (s-\mu_3) \ldots (s-\mu_n)$$

Resolent-lo, es pot trobar el valor del vector. K_e.

Un desavantatge d'aquests mètode és que està restringit a sistemes fins a 3r ordre; d'altra banda, el sistema ha d'estar en la forma canònica observable.

Els pols de l'observador haurien de ser 3 a 5 vegades més grans (més negatius) que els pols del controlador per realimentació d'estat, sempre que no se surti de dins de la regió d'estabilitat (cercle unitari) donada pel LGR (lloc geomètric de les arrels). La tria dels pols desitjats determinaran les característiques de la resposta obtinguda. Això significa que pot existir un conjunt infinit de vectors K_e com a solució, dels quals només un limitat nombre de solucions satisfà les necessitats requerides pel sistema (com per exemple, sobre esmorteïment, velocitat de resposta ,etc. del sistema estimat). En conseqüència, s'hauran de fer proves fins a escollir els pols que compleixin amb els requisits demanats.

4.2 Mètode de disseny d'observador complert (per la fórmula d'Ackerman)

La fórmula d'Ackerman aplicada al disseny d'observadors d'estat està configurada de la següent manera:

$$L = \Phi(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

On Φ(A) equival a Φ(s), que és el polinomi característic desitjat; però, en comptes de la "s", col·loquem la matriu "A".

Exemple 6:

pols desitjats: -3± j

Sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Solució:

Si ϕ(s) = (s-μ_1)(s-μ_2)=(s+3-j)(s+3+j)= s^2+6s+10

per tant = ϕ(A) = A^2+6A+10I

$$\text{L}=(\text{A}^2 + 6A + 10\text{I})\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\right) x \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$L = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4.3 Mètode de disseny d'observador complert (mètode complert)

Aquests mètode es regeix per una sèrie de passos:

4.3.1 Determinar la controlabilitat del sistema i l'observabilitat

Controlabilitat: $\Rightarrow$ $W_C = [B \;\; AB \;\ldots\; A^{n-1}B]$

Observabilitat: $\Rightarrow \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

4.3.2 Calcular el polinomi característic original |sI-A|, el qual serà:

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

4.3.3 És convenient treballar amb les equacions d'estat en la seva forma canònica observable. En cas que no trobem les equacions d'estat en aquesta forma, s'ha de determinar una matriu de transformació per portar-la a aquesta forma, la qual es defineix com:

$$Q = \left(W \text{ x Wo}\right)^{-1}$$

On Wo és la matriu d'observabilitat, i W es defineix com:

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a_1, a_2, ... a_{n-2}, a_{n-3}, són els coeficients del polinomi característic original |sI-A|.

4.3.4 Es determina el polinomi característic desitjat a partir de $(s-\mu_1)$ $(s-\mu_2)$ $(s-\mu_3)$ ... $(s-\mu_n)$, on μ_i és un pol desitjat, obtenint:

$$s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_{n-1} s + b_n$$

4.3.5 Finalment el vector K_e es troba a partir de la següent expressió:

$$L = Q \times \begin{bmatrix} b_n - a_n \\ b_{n-1} - a_{n-1} \\ b_{n-2} - a_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

Exemple 7:

Pols desitjats:-5,-2 ± j

Sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

<u>4.3.1</u>

<u>Controlabilitat</u>

$$Wc = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$rank(Wc) = 3$$

$$\det(Wc) = -1$$

$\therefore$ El sistema és controlable

<u>Observabilitat</u>

$$Wo = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank(Wc) = 3$$

$$\det(Wc) = 1$$

$\therefore$ El sistema és observable

4.3.2

$$[sI-A]=\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[sI-A]=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$[sI-A]=s(s^2+2s+1)+2$$

$$[sI-A]=s^3+2s^2+s+2 \;\Rightarrow\; \equiv \; s^3+a_1s^2+a_2s+a_3$$

$$\Rightarrow a_1=2 \quad a_2=1 \quad a_3=2$$

4.3.3 Q= (W x Wo)$^{-1}$

$$W=\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W\ x\ Wo=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

4.3.4

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)$$
$$=(s+5)(s+2+j)(s+2-j)$$
$$=(s+5)(s^2+4s+5)$$
$$=s^3+9s^2+25s+25 \quad \equiv \quad s^3+b_1s^2+b_2s+b_3$$
$$\Rightarrow b_1=9 \quad b_2=25 \quad b_3=25$$

4.3.5

$$K_e = Q\ x \begin{bmatrix} b_3 - a_3 \\ b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 23 \\ 24 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \\ K_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

4.4 Mètode de disseny d'observador complert (mitjançant el software Matlab)

El software Matlab també proporciona eines per poder trobar les Ke dels observadors. Les comandes utilitzades són "acker" i "place"

Per utilitzar aquestes comandes, Matlab demana els següents valors:

El sistema ($\dot{x}$= Ax+Bu ; y= Cx+Dx);

Vector de pols desitjats:

P=[μ_1 μ_2 … μ_n]

Llavors es pot obtenir un observador d'estat utilitzant:

K_e= place (A',B',P)' o també

K_e= acker (A',B',P)'

Exemple8:

Pols desitjats:-2,-1± j

Sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Resolució al Matlab

```
>> A=[0 1 0;0 0 1;-3 -2 -1];
>>C=[2 0 0];
>>P=[-2 -1+j -1-j];
>>Ke= acker (A',C',P)'
Ke =
    1.5000
    0.5000
    -3.000
>>Ke= place (A',C',P)'
Ke =
    1.5000
    0.5000
    -3.0000
```

Fent ús de Matlab també es poden trobar els valors de les realimentacions mitjançant els mètodes anteriorment esmentats.

Exemple 9:

Buscar els valors de K i de Ke del següent sistema:

Pols sistema: $-1.8 \pm 2.4j$
Pols desitjats $\Rightarrow$ $\mu_1 = \mu_2 = -8$
Sistema:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C=[1 \;\; 0]$$

<u>Matlab:</u>

-Creació de les matrius:

>>A=[0 1;20.6 0];

>>B=[0;1];

>>C=[1 0];

>>D=[0];

-Comprovació de la controlabilitat del sistema:

>>M=[B A*B];

>>rank (M)

ans=

2

-Per tant, indica que el sistema és totalment controlable (i és possible posar uns pols arbitraris al sistema).

-S'introdueixen els pols escollits al sistema per poder obtenir l'equació característica d'aquests. Es posen els pols de forma matricial, i amb la funció "poly" s'obté l'equació del sistema.

>>J=[-1.8+2.4*i 0;0 -1.8-2.4*i];→ (i= j (eix imaginari))

poly (J)

ans=

1.0000 3.6000 9.0000

La metodologia emprada en aquest exemple és la fórmula d’Ackerman. És necessari saber el valor de Φ (phi).

Per trobar-lo, simplement es fa una combinació matricial entre el polinomi característic del sistema i la matriu A (amb la funció “polyvalm” s’aconsegueix transformar d’equació a matriu.).

>>Phi= polyvalm (poly(J),A);

Una vegada es tenen tots els paràmetres necessaris, ja es poden trobar les realimentacions del sistema:

>>K=[0 1]*inv(M)*Phi[1]

K=

29.6000 3.6000

(Nota[1]:Per poder realitzar el càlcul de K s’han de posar els termes tal com s’han indicat en l’equació anterior, ja que la multiplicació matricial no és commutativa.)

Ara, s’han de fer els càlculs per poder trobar els valors de Ke.

Primer, es farà la comprovació de l’observabilitat del sistema:

>>N=[C’ A’*C’];

>>rank (N)

ans=

2

Per tant, significa que el sistema és completament observable. En cas que hagués sortit un “1” en el rang, voldria dir que el sistema és observable, però no en la seva totalitat, sinó només en una part. Podria ser que fos necessari només observar aquesta variable. En aquests cas, s’hauria d’utilitzar un observador d’ordre reduït.

Es busca ara l’equació característica desitjada de l’observador a partir dels pols desitjats.

>>Jo=[-8 0;0 -8];

Poly (Jo)

ans=

1 16 64

Ara, s'ha de trobar la Φ del sistema observador:

```
>>Ph= polyvalm(poly(Jo),A);
```

Finalment, es troben els valors de Ke:

```
>>Ke=Ph*(inv(N'))*[0;1]
```
[2]

Ke=

16.0000

84.6000

(Nota[2]= Les matrius s'han d'estructurar de la manera indicada; si no, succeirà el mateix que passa per poder trobar els valors de K.)

Matlab és una eina senzilla i fàcil de portar per fer els càlculs d'aquests sistemes. Tots els càlculs fets anteriorment es poden extrapolar a Matlab i obtenir el mateix resultat. Tal vegada, el càlcul més directe és la fórmula d'Ackerman; no obstant, tal com s'ha demostrat, tots els processos són correctes.

A continuació, es farà un exemple el qual englobarà els quatre mètodes descrits anteriorment (mètode complert, mètode abreujat, mètode per fórmula d'Ackerman, mètode utilitzant Matlab).

Exemple 10:

Troba els valors de Ke del següent sistema amb els següents pols desitjats:

Pols desitjats: -2, -3 $\pm$ 0.5j

Sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1]x$$

Mètode complert

Controlabilitat:

$$Wc = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$rank(Wc) = 3$$
$$\det(Wc) = 16$$
$\therefore$ El sistema és controlable

Observabilitat:

$$Wc = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$rank(Wc) = 3$$
$$\det(Wc) = -1$$
$\therefore$ El sistema és observable

Polinomi característic original

$$\left[sI - A\right] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\left[sI - A\right] = \begin{bmatrix} s & 0 & 4 \\ -1 & s & 1 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix}$$
$$\left[sI - A\right] = s(s^2 + 2s + 1) + 4$$
$$\left[sI - A\right] = s^3 + 2s^2 + s + 4 \Rightarrow \quad \equiv \quad \mathrm{s}^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$$
$$\Rightarrow a_1 = 2 \quad \mathrm{a}_2 = 1 \quad \mathrm{a}_3 = 4$$

Q= (W x Wo)$^{-1}$

$$W = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W \ x \ Wo = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinomi característic desitjat:

$$\begin{aligned} &(s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3) \\ &= (s+2)(s+3+0.5j)(s+3-0.5j) \\ &= (s+2)(s^2+6s+9.25) \\ &= s^3+8s^2+21.25s+18.5 \quad \equiv \quad s^3+b_1 s^2+b_2 s+b_3 \\ &\Rightarrow b_1 = 8 \quad b_2 = 21.25 \quad b_3 = 18.5 \end{aligned}$$

Vector observador

$$K_e = Q \ x \begin{bmatrix} b_3 - a_3 \\ b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 14.5 \\ 20.25 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \\ K_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.5 \\ 20.25 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Mètode abreujat

$$\left[sI-A+LC\right]=\left(s-\mu_1\right)(s-\mu_2)(s-\mu_3)$$

$$\left[sI-A+LC\right]=\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \\ K_{e3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[sI-A+LC\right]=\begin{bmatrix} s & 0 & 4 \\ -1 & s & 1 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{e1} \\ 0 & 0 & K_{e2} \\ 0 & 0 & K_{e3} \end{bmatrix}$$

$$\left[sI-A+LC\right]=\begin{bmatrix} s & 0 & 4+K_{e1} \\ -1 & s & 1+K_{e2} \\ 0 & -1 & s+2+K_{e3} \end{bmatrix}$$

$$\left[sI-A+LC\right]=s\left(s^2+sK_{e3}+2s+1+K_{e2}\right)+(4+K_{e1})$$

$$\left[sI-A+LC\right]=s^3+(2+K_{e3})s^2+(1+K_{e2})s+(4+K_{e1})$$

Polinomi desitjat:

$$\left(s-\mu_1\right)(s-\mu_2)(s-\mu_3)=\left(s+2\right)(s+3+0.5j)(s+3-0.5j)=s^3+8s^2+21.25s+18.5$$

Després per equivalència $\Rightarrow \mathrm{s}^3+(K_{e3})s^2+(1+K_{e2})s+(4+K_{e1})=s^3+8s^2+21.25s+18.5$

$$on\begin{cases} (2+K_{e3})s^2=8s^2 \Rightarrow K_{e3}=6 \\ (1+K_{e2})s=21.25s \Rightarrow K_{e2}=20.25 \\ (4+K_{e1})=18.5 \Rightarrow K_{e1}=14.5 \end{cases}$$

Mètode per fórmula d'Ackerman

$Si\ \phi(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3) = s^3 + 8s^2 + 21.25s + 18.5$

Per tant $\phi(A) = A^3 + 8A^2 + 21.25A + 18.5I$

$$K_e = \Phi(A)\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

$$K_e = (A^3 + 8A^2 + 21.25A + 18.5I)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^3 + 8\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + 21.25\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + 18.51\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) x$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$\Downarrow$

$$K_e = \begin{bmatrix} 14.5 & -24 & -33 \\ 20.25 & 8.5 & 32.25 \\ 6 & 8.25 & -8 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \\ K_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.5 \\ 20.25 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Mètode utilitzant Matlab

```
>>A = [0 0 -4;1 0 -1;0 1 -2];
>>C = [0 0 1];
>>P = [-2 -3+0.5j -3-0.5j];

>>Ke = acker(A',C',P)'
Ke =
    14.5000
    20.2500
    6.0000

>>Ke = place(A',C',P)'
Ke =
    14.5000
    20.2500
    6.0000
```

Mostrada la metodologia per trobar les realimentacions tant del sistema real com del sistema observat, tot seguit s’explicaran les diferents configuracions que es poden obtenir fent el muntatge d’observador complert, es farà un esquema d’aquest muntatge juntament amb la seva resposta i es visualitzarà amb el Simulink.

4.5 Retorn d'estat complert amb estimador (configuració 1)

Aquest sistema estableix una configuració en què les realimentacions de l'observador estan fora de la matriu del observador (State-Space).

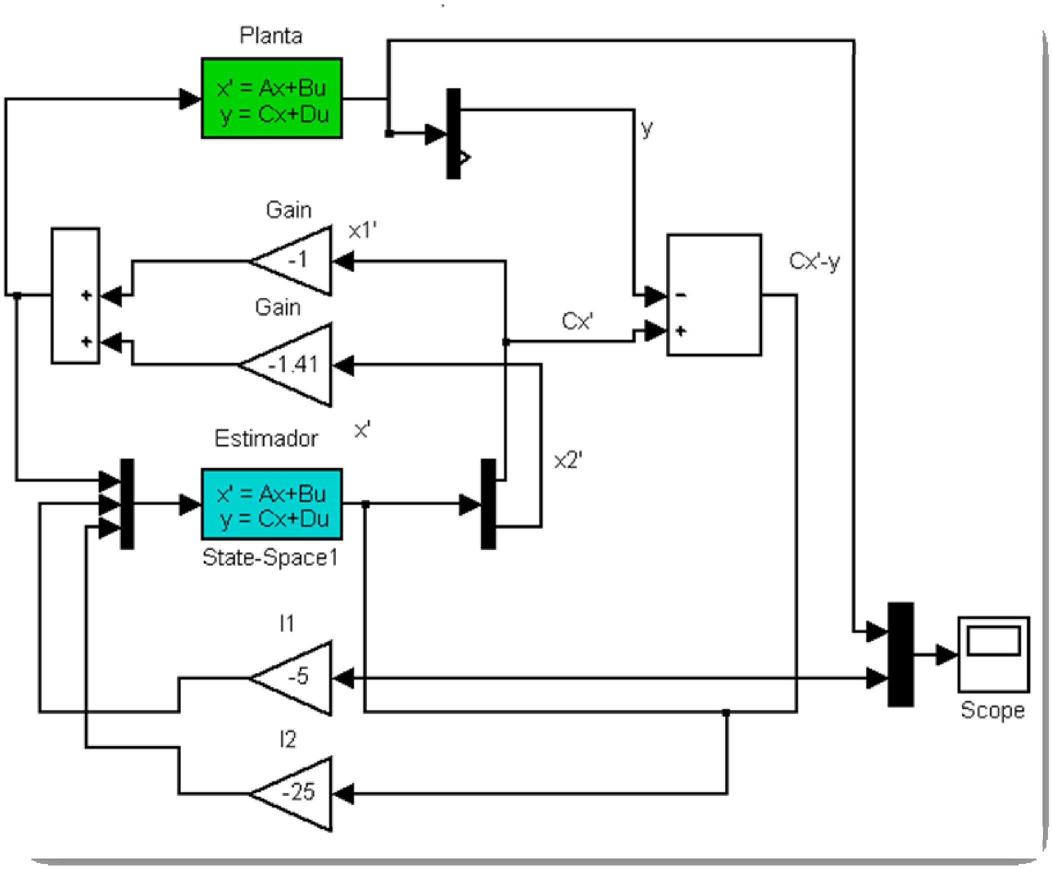


Figura IX. Esquema d'un sistema retorn d'estat complert amb observador.

<u>CC program:</u>

Els passos a seguir per trobar la "Ke" són molt semblants als càlculs per trobar la "K" del sistema real. La diferència està en què escollirem uns pols desitjats molt mes ràpids que els del sistema real

Exemple 11:

A=(0,1;0,0)

B=(0;1)

C=(1,0;)

D=(0;0)

polinomi desitjat: s2+5*s+25

arrels del polinomi: $\begin{matrix} -2.5+4.33j \\ -2.5-4.33j \end{matrix}$

Utilitzant l'eina "poleplace" s'obtenen els pols de l'observador:

```
>>a=[0 1;0 0];

>>b=[0;1];

>>c=[1,0];

>>d=[0;0];

>>p=[-2.5+4.33*j;-2.5-4.33*j])

>>ke=pole (a',c',p)'

>>ke

    5

    25
```

Aleshores:

K_{e1}=5

K_{e2}=25

Consideració:

A l'hora de fer l'esquema per poder obtenir la resposta en el Simulink, en el "State-Space" les matrius varien sensiblement. La matriu B canviarà de [0;1] a → [0 1 0;1 0 1] (matriu identitat). Com a conseqüència d'aquest canvi, també s'haurà de retocar la matriu D per tal d'obtenir una compatibilitat amb els canvis de dimensions de la matriu B. La matriu D canviarà de [0;0] a → [0 0 0;0 0 0]

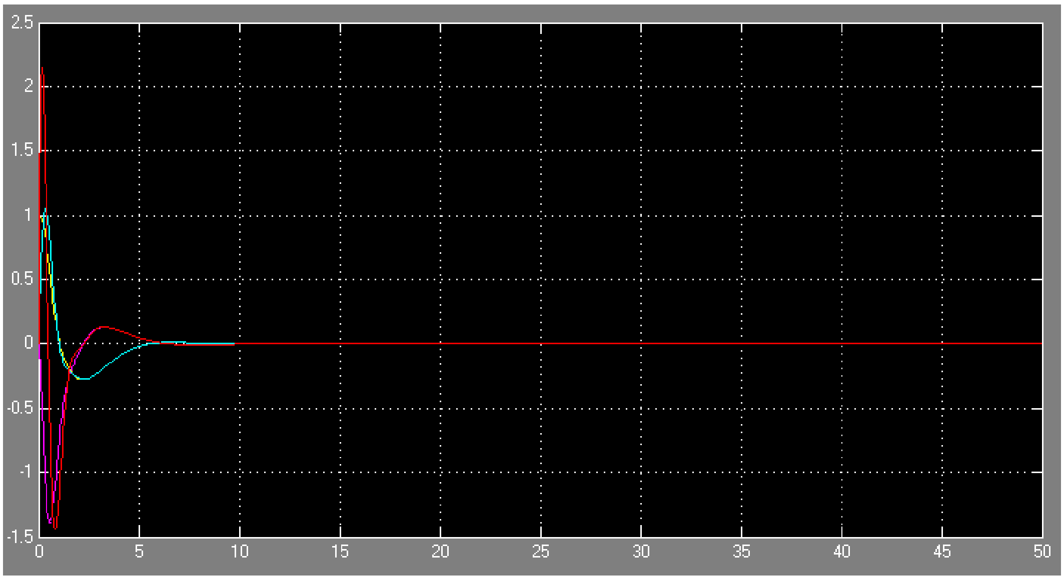


Figura X. Resposta d’un sistema retorn d’estat complert amb observador.
Blau i groc: paràmetres del sistema. Vermell i lila: paràmetres de l’observador.

La resposta de l’observador intenta avançar-se a la resposta del sistema real per obtenir la dinàmica del sistema, moments abans que es produeixi al sistema real.

4.6 Retorn d’estat complert amb estimador (configuració 2)

El sistema és pràcticament igual a l’anterior, però té la particularitat que dins del bloc estimador s’introduiran les realimentacions de l’observador (k_{e1} i k_{e2}). Així, introduint aquest valor, el que es farà és modificar la matriu B (ampliant-la); per tant, la matriu D també haurà d’augmentar per tal que hi hagi compatibilitat.

B=[0 -5;1 -25];

D=[0 0; 0 0];

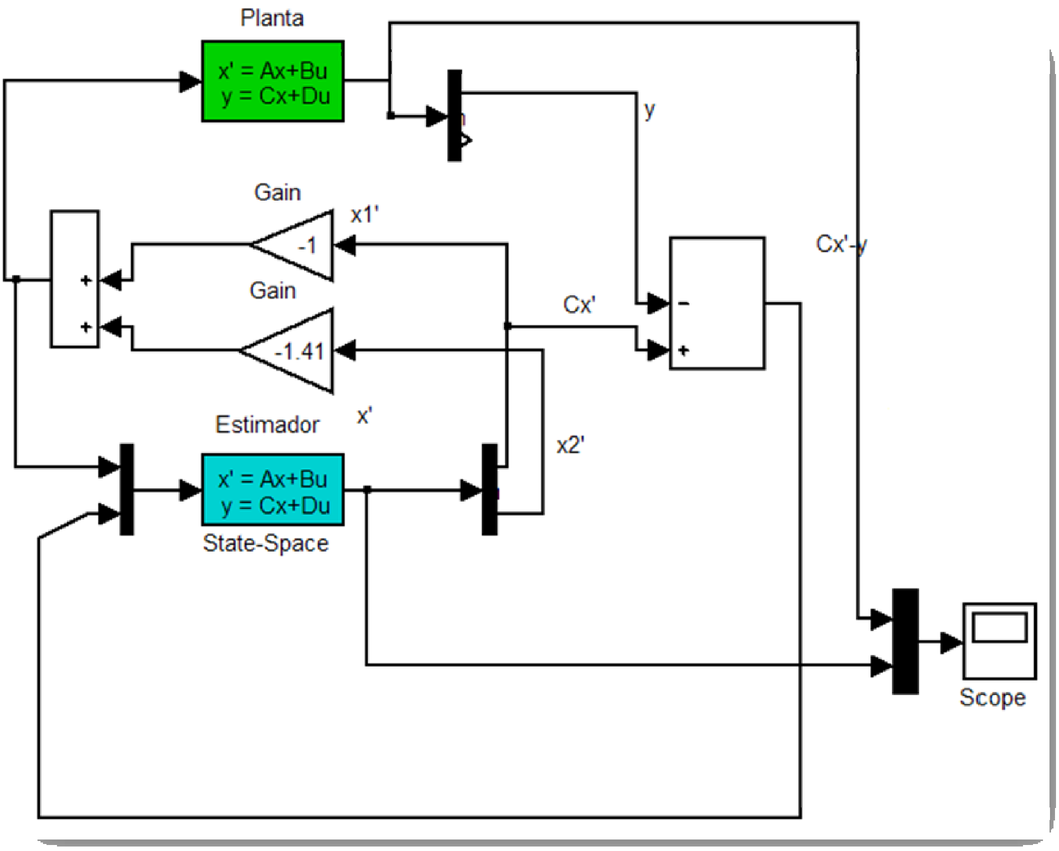


Figura XI. Esquema d'un sistema per retorn d'estat amb estimador (una altra configuració).

Evidentment, la resposta del sistema serà igual a la de la configuració anterior. L'avantatge que es pot trobar en aquest mètode és que el muntatge al Simulink és d'una dificultat menor (tot i que el muntatge de l'altre sistema tampoc no és excessivament dificultós).

4.7 Retorn d'estat complert amb estimador, entrada de consigna i integració afegida

Aquest mètode és molt similar al mètode corresponent a la figura VI, però ara en una de les variables (x_1 de l'observador) s'introdueix una consigna (en aquests cas -3).

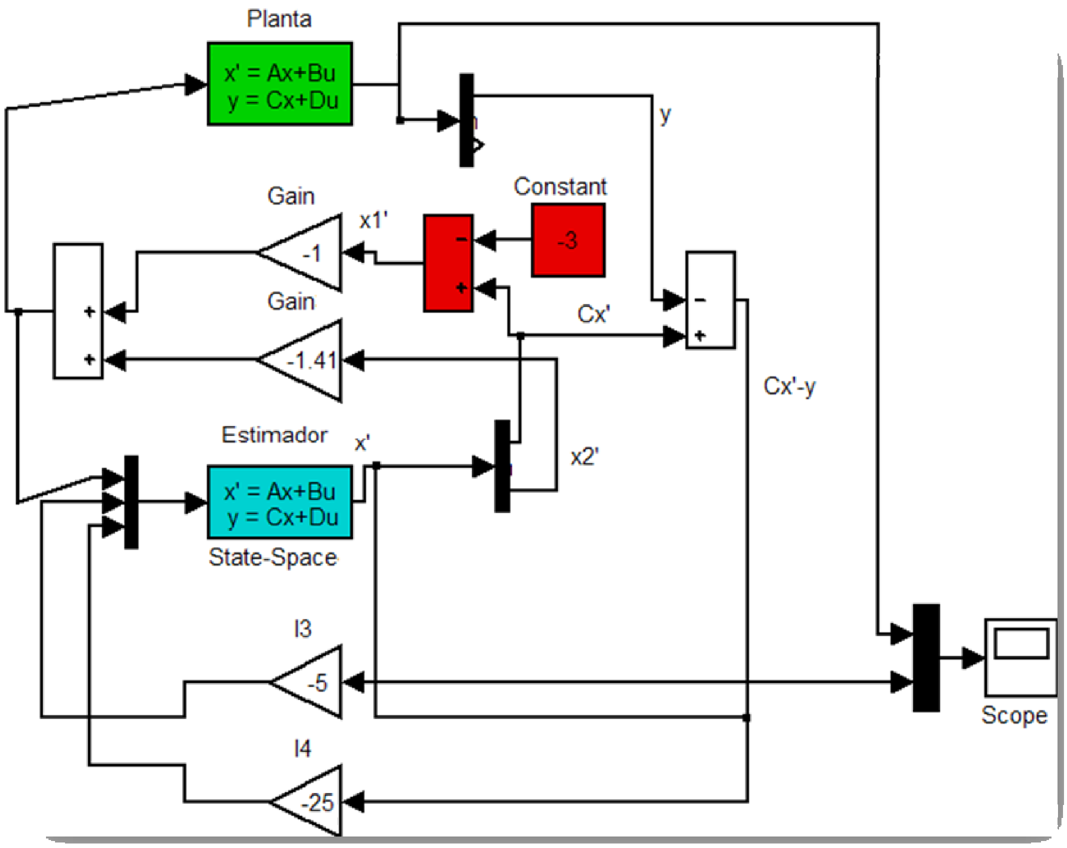


Figura XII. Esquema d'un sistema per retorn d'estat amb estimador ,entrada consigna i integració afegida.

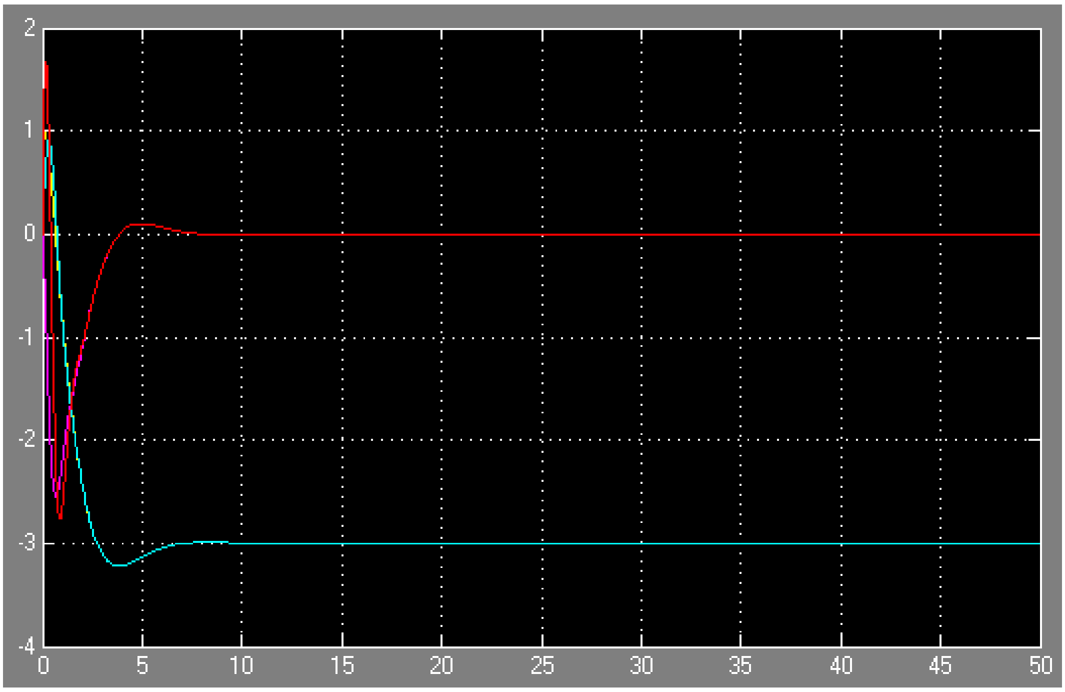


Figura XIII. Resposta temporal d’un sistema per retorn d’estat amb estimador ,entrada consigna i integració afegida.

El valor de la gràfica quan s’estabilitza és de “-3”(senyal on s’introdueix la consigna). Sembla que l’estabilització es produeix al voltant dels 9-10 segons. Hi ha un petit esmorteïment abans d’arribar a la seva estabilització completa.

4.8 Retorn d’estat discret complert amb estimador, entrada de consigna i integració afegida

Aquesta configuració representa un punt important en el desenvolupament d’aquest projecte, ja que una vegada s’obtingui el sistema en format analògic, s’hauran de discretitzar els paràmetres del motor per treballar en digital. Una vegada discretitzar, la forma per buscar els paràmetres és la mateixa que en la forma analògica.

Exemple 12:

Sistema
a = [0,1;0,0]
b = [0;1]
c = [1,0;0,1]
d = [0;0]
Pols (en el pla z):
$z_1 = 0.9$ i $z_2 = 0.7 \Rightarrow$ pols del sistema
$z_{e1} = 0.5$ i $z_{e2} = 0.3 \Rightarrow$ pols del estimador (més ràpids)

Per poder fer el control per retorn d'estat discret, anteriorment s'haurà de discretitzar el sistema (T_m=0.1). S'utilitzarà el Matlab per fer-ho, tot i que es pot utilitzar el ProgramCC (això sí,amb la versió 5.0 els valors obtinguts no corresponen al que s'obté al Matlab. La versió 4.0 té una funció (que no té la versió 5.0) que troba els valors de la realimentació tant del sistema real com els valors del observadors).

Matlab:

```
>> a=[0 1;0 0];

>> b=[0;1];

>> c=[1 0;0 1];

>> d=[0;0];

>> [g,h]=c2d(a,b,0.1)

g =

    1.0000      0.1000

    0           1.0000

h =

    0.0050

    0.1000

>> m=[h g*h];

>> J=[0.9 0;0 0.7];

>> jj=poly (J);

>> phi=polyvalm(jj,g),
```

```
phi =

    0.0300    0.0400
    0         0.0300

>> phi=polyvalm(jj,g);
>> k=[0 1]*inv(m)*phi

k =

    3.0000    3.8500
```

Per poder trobar els valors de les realimentacions de K_e, la matriu C es modifica per [1 0] (es fa com si es considerés que només es vol veure una sortida del sistema (x_1, en aquests cas), perquè són necessaris per al càlcul (compatibilitat). Aquesta variació no modifica el valor del rang (segueix tenint el mateix valor que si no es modifiqués (“2”)). En cas que el rang variés, significaria que el sistema no és completament observable; per tant, potser s’hauria de fer un observador reduït.

Matlab:

```
>> c=[1 0];
>> n=[c' g'*c'];
>> n=[c' g'*c']

n =

    1.0000    1.0000
    0         0.1000

>> rank (n)

ans =

    2

>> JJ=[0.5 0;0 0.3];
>> jjj=poly(JJ);
>> ph=polyvalm(jjj,g);
>> ke=ph*(inv(n'))*[0;1]
```

ke =

1.2000

3.5000

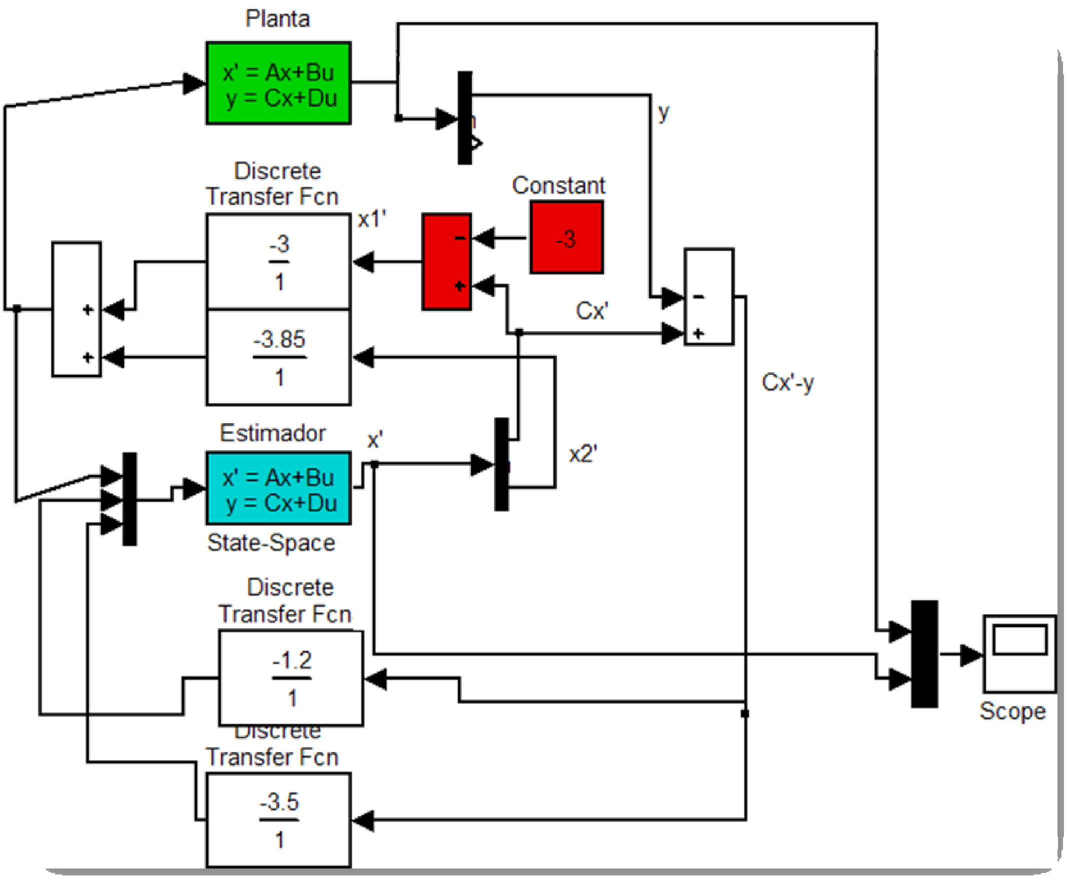


Figura XIV. Sistema discret per retorn d'estat amb estimador ,entrada consigna i integració afegida.

4.9 Control per retorn d'estat complert a partir de les equacions del sistema

Fins ara s'han obtingut totes les realimentacions amb Simulink, tractant amb la utilitat del bloc "State-Space" (posant les matrius A,B,C,D del sistema). Però també es pot obtenir la mateixa resposta utilitzant les equacions necessàries del sistema. Es mostrarà a continuació.

Exemple 13:

Pols sistema: -1.8 $\pm$ 2.4j

Pols desitjats (observador) $\Rightarrow$ $\mu_1 = \mu_2 = -8$

Sistema:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C=[1 \;\; 0]$$

Fent les operacions corresponents per trobar les realimentacions del sistema, s'obté:

$$K = [29.6 \;\; 3.6]$$

Es busquen ara els valors de K_e i s'obté:

$$K_e = \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix}$$

Ara, s'ha de trobar l'equació que relacioni l'observador amb els altres paràmetres del sistema. L'equació que s'obté és la següent:

$$\dot{\bar{x}} = (A - K_e C)\bar{x} + Bu + K_e y$$

Si $\Rightarrow$ u = -K$\bar{x}$ $\Rightarrow$ llavors:

$$\dot{\bar{x}} = (A - K_e C - BK)\bar{x} + K_e y$$

Es fa el desenvolupament de l'equació de forma matricial i el resultat és aquest:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} [1 \quad 0] - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [29.6 \quad 3.6] \right\} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} y$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93.6 & -3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} y}$$

Una vegada s'aconsegueix aquesta equació, es pot fer el muntatge Simulink i obtenir el següent:

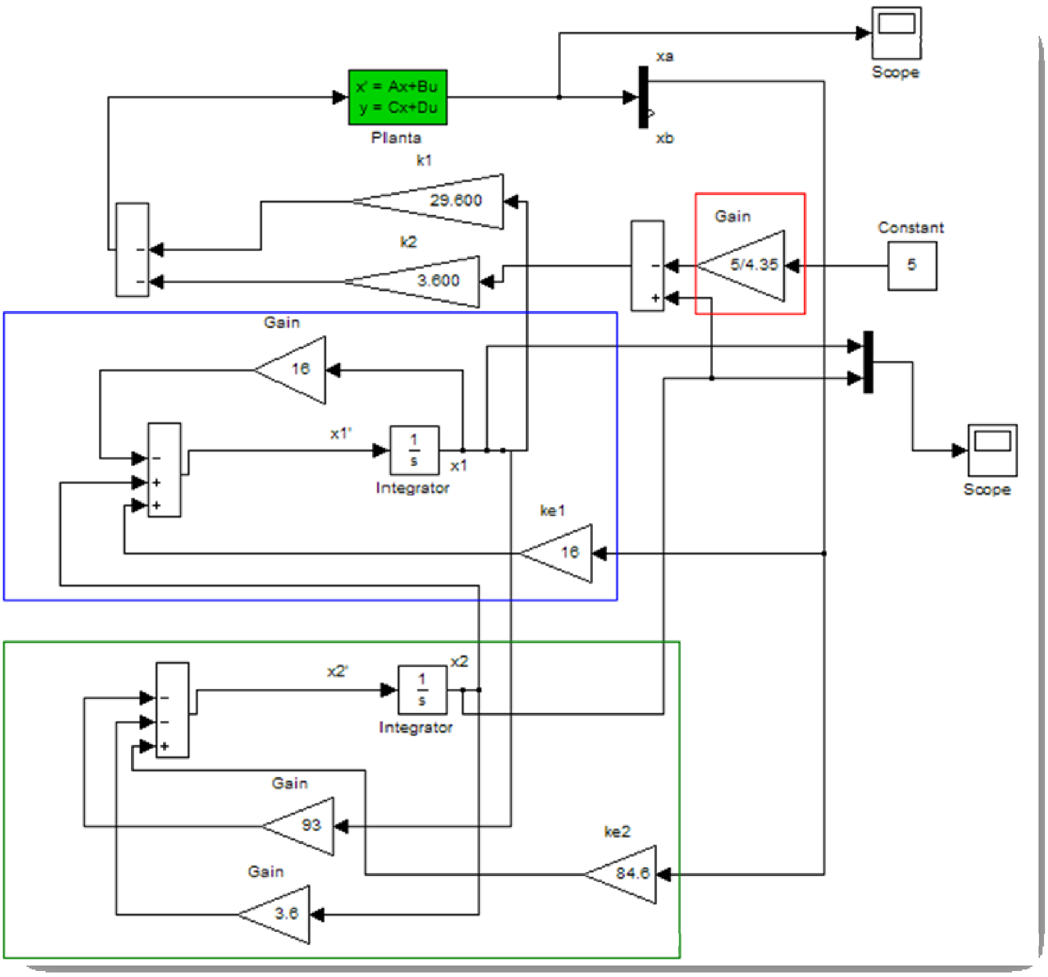


Figura XV. Esquema Simulink d'un sistema de control per retorn d'estat complert (a partir de les equacions del sistema).

<u>Quadrat blau:</u> mostra la configuració de x_1' (de l'observador)

<u>Quadrat verd:</u> mostra la configuració de x_2' (de l'observador)

<u>Quadrat vermell:</u> aquest bloc "gain" està col·locat perquè, en el moment de simular-ho, es pugui veure com la gràfica està atenuada i no arriba al valor corresponent de consigna ("5"). Aleshores, per solucionar-ho, el que es fa és introduir aquest bloc juntament amb la consigna i fer la divisió entre el valor de la consigna i el valor al qual arribava la gràfica. Fet això, el valor arribarà exactament al valor que hi hagi de consigna "5".

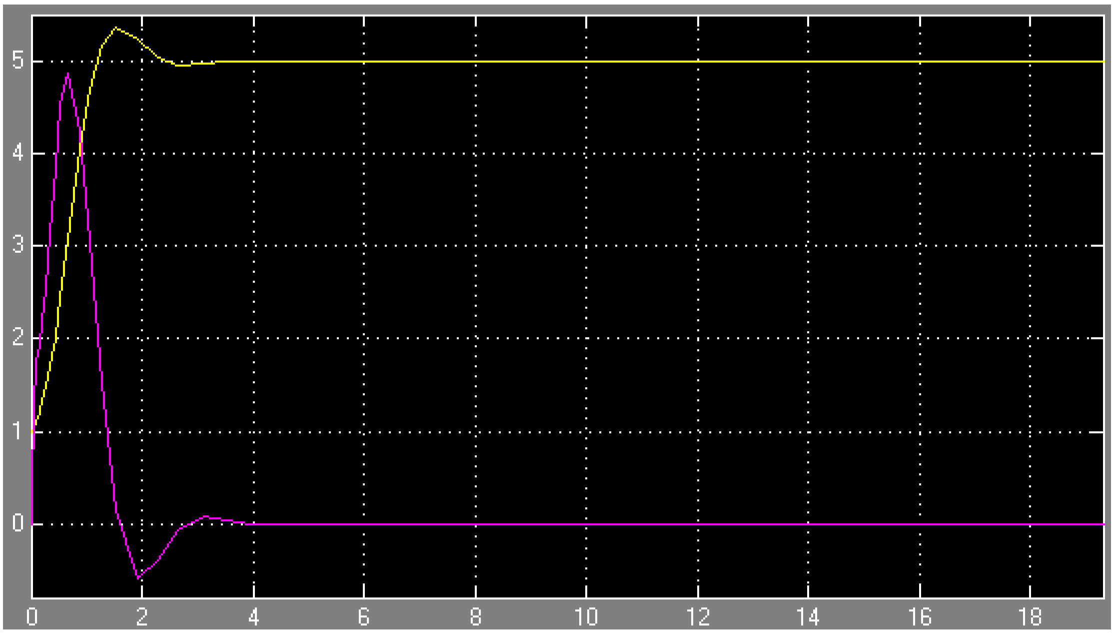


Figura XVI. Resposta temporal del sistema per retorn d'estat amb un observador d'estat complert (a partir de les equacions del sistema).

4.10 Sistemes de retorn d'estat amb observador reduït

Mostrades ja les diferents tipologies a les quals podem arribar amb un observador d'estat complert, i les diferents maneres que hi ha per poder-los construir, seguidament es veurà un altre tipus d'observador, **l'observador d'ordre reduït** (o **ordre mínim** si ja no es pot reduir més).

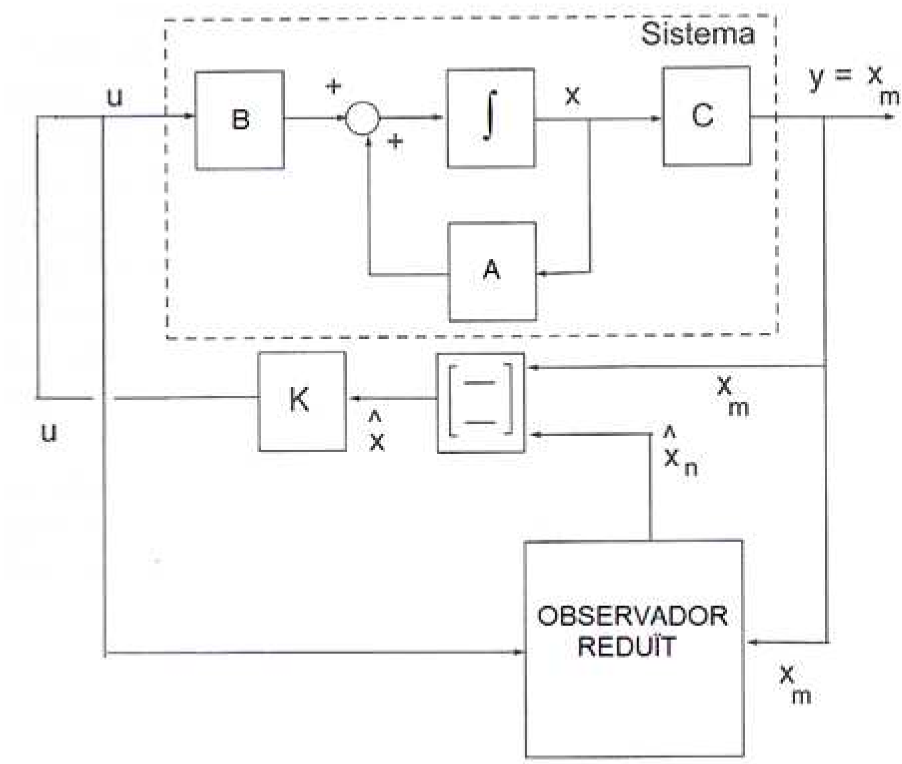


Figura XVII. Esquema general d'un sistema per retorn d'estat amb un observador d'ordre reduït.

El vector X pot ser dividit en 2 vectors:

X_a correspon als estats mesurables, d'ordre (m x 1)

X_b correspon als estats observables, d'ordre (n-m x 1)

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \\ X_{m+1} \\ X_{m+2} \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}_{nx1} \qquad \begin{array}{l} X_1 \ldots X_m \Rightarrow \text{Estats coneguts o medibles} \\ X_{m+1} \ldots X_n \Rightarrow \text{Estats no coneguts que requereixen ser observats} \end{array}$$

Sabent això, s'obté la següent matriu:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}a \\ \dot{X}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Aaa & Aab \\ Aba & Abb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xa \\ Xb \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ba \\ Bb \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} Ca & Cb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xa \\ Xb \end{bmatrix}$$

Les dimensions són:

Aaa $\rightarrow$ m x m

Aab $\rightarrow$ m x n-m

Aba $\rightarrow$ n-m x m

Abb $\rightarrow$ n-m x n-m

Ba $\rightarrow$ m x 1

Bb $\rightarrow$ n-m x 1

Ca $\rightarrow$ 1 x m

Cb $\rightarrow$ 1 x n-m

Per tant, el sistema queda reduït a la següent expressió:

$$\dot{X}a = Aaa \cdot Xa + Aab \cdot Xb + Ba \cdot u$$

$$\dot{X}b = Aba \cdot Xa + Abb \cdot Xb + Bb \cdot u$$

Així doncs, aquest sistema el que fa és dividir-nos el vector X en la part mesurable del sistema (valors que es coneixen), i els valors que s'han d'observar. Tot seguit, es farà el disseny de l'observador.

4.11 Disseny d'observador d'ordre reduït

¡El sistema que es descriu a l'observador d'ordre complert és:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Dx$$

El sistema que descriuen els observadors d'ordre reduït són el següents:

Equació d'estat: $\Rightarrow$ $\dot{X}b$ = Aba·Xa + Abb·Xb +Bb·u

Equació de sortida: $\Rightarrow$ Aab·Xb = $\dot{X}a$ - Aaa·Xa+ Ba·u

Ara que se sap això, es poden establir unes equivalències amb l'observador d'estat complert per tal de facilitar el càlcul:

Observador d'ordre complert	Observador d'ordre reduït
$\overline{X}$	$\overline{X}b$
A	Aab
$B{\cdot}u$	$Aba{\cdot}Xa + Bb{\cdot}u$
Y	$\dot{X}a - Aaa{\cdot}Xa - Ba{\cdot}u$
$\overline{Y}$	$Aab{\cdot}\overline{X}b$
C	Aab

El vector K_e de l'observador reduït que es busca té un ordre de n-m x 1.

En el disseny d'observador d'ordre complert es va establir la següent equació:

$$\dot{\overline{x}} = A\overline{x} + Bu + K_e(y - \overline{y})$$

Amb l'observador reduït, a partir d'aquesta equació, es pot establir una equivalència amb els termes anteriorment esmentats, obtenint el següent:

$$\boxed{\dot{\overline{X}}b = (Abb - K_e{\cdot}Aab){\cdot}\overline{X}b + Aba{\cdot}Xa + Bb{\cdot}u + K_e(\dot{X}a - Aaa{\cdot}Xa - Ba{\cdot}u)}$$

I l'equació de l'error és: $\Rightarrow \dot{e} = (Abb - K_e{\cdot}Aab)e$

I l'equació característica per a l'observador és la següent:

$$\Rightarrow \quad |sI - Abb + K_e{\cdot}Aab| = s^i + a_1 s^{i-1} + a_2 s^{i-2} + \ldots + a_{i-1}s + a_i = 0$$

on "i" equival a l'ordre de K_e, és a dir (n-m).

La metodologia per trobar les K_e és pràcticament igual que als observadors d'ordre complert, (canvien l'índex "n" (observadors complert) per l'índex "i. Llavors, si per exemple es té un sistema amb ordre 3 i en aquest sistema hi ha un estat mesurable, m=1, el sistema observat serà d'ordre 2 (n-m=3-1=2=i).

Un altre canvi que s'ha de fer és realitzar una equivalència entre matrius (reduït-complert).

$$\begin{aligned} Aaa &\Rightarrow D \\ Aab &\Rightarrow C \\ Aba &\Rightarrow B \\ Abb &\Rightarrow A \end{aligned}$$

Una vegada fetes totes les conversions d'observador complert a observador reduït (i considerat el nou ordre del sistema (i) i les noves matrius del sistema (Abb, Aba, Aab, Aaa), ara només s'ha d'aplicar la metodologia per trobar les realimentacions de l'ordre reduït (utilitzant la mateixa metodologia que s'emprava per buscar l'observador d'ordre complert).

Exemple 14:

En el següent sistema, hi ha la variable x_1 que es pot mesurar amb precisió. Es dissenyarà l'observador d'ordre reduït K_e aplicant els quatre mètodes que s'han descrit a l'observador d'ordre complert:

Pols desitjats: $-3 \pm 0.5j$

Sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

S'estableix en primer lloc l'orde del nou sistema observat: →3 – 1 → i=2

Les nous matrius del sistema són:

$$\begin{aligned} D &\Rightarrow Aaa \\ C &\Rightarrow Aab \\ B &\Rightarrow Aba \\ A &\Rightarrow Abb \end{aligned}$$

Aaa = $[0]$ Aab = $[1 \quad 0]$ Aba = $\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$ Abb = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$

Mètode Complert

Controlabilitat:

$$Wcr = [Aba \quad Abb{\cdot}Aba \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -25 \end{bmatrix}$$

$$rank(Wc) = 2$$

$$\det(Wc) = -11$$

$\therefore$ El sistema és controlable

Observabilitat:

$$Wor = \begin{bmatrix} Aab \\ Aab{\cdot}Abb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank(Wc) = 2$$

$$\det(Wc) = -1$$

$\therefore$ El sistema és observable

Polinomi característic original:

$$[sI - A] = [\mathrm{sI\ -\ Abb}] \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 11 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$= s^2 + 6s + 11$$

$$[\mathrm{sI\ -\ Abb}] = s^2 + 6s + 11 \Rightarrow \quad \equiv \quad s^2 + a_1 s + a_2$$

$$\Rightarrow a_1 = 6 \quad \mathrm{a}_2 = 11$$

Q= (W x Wo)$^{-1}$

$$\mathrm{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W \ x \ Wor = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Polinomi característic desitjat:

$$
\begin{aligned}
&(s-\mu_1)(s-\mu_2)\\
&=(s+2+3.4641j)(s+2-3.4641j)\\
&=+s^2+4s+16 \quad \equiv \quad s^2+b_1 s+b_2\\
&\Rightarrow b_1=4 \quad \mathrm{b}_2=16
\end{aligned}
$$

Vector Observador:

$$
K_e=Q\ x\begin{bmatrix} b_2-a_2 \\ b_1-a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}
$$

$$
K_e=\begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix}
$$

Mètode Abreujat

$$
\begin{aligned}
&\left[sI-A+LC\right]\equiv[\mathrm{sI\ -\ Abb\ +\ K_e}\cdot Aab]\left(s-\mu_1\right)(s-\mu_2)\\
&[\mathrm{sI\ -\ Abb\ +\ K_e}\cdot Aab]=s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\\
&[\mathrm{sI\ -\ Abb\ +\ K_e}\cdot Aab]=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 11 & s+6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} K_{e1} & 0 \\ K_{e2} & 0 \end{bmatrix}\\
&[\mathrm{sI\ -\ Abb\ +\ K_e}\cdot Aab]=\begin{bmatrix} s+K_{e1} & -1 \\ 11+K_{e2} & s+6 \end{bmatrix}\\
&[\mathrm{sI\ -\ Abb\ +\ K_e}\cdot Aab]=(s+K_{e1})\left(s+6\right)+\left(11+K_{e2}\right)\\
&[\mathrm{sI\ -\ Abb\ +\ K_e}\cdot Aab]=s^2+(6+K_{e1})s+(11+K_{e2})
\end{aligned}
$$

Polinomi desitjat:

$$
\left(s-\mu_1\right)(s-\mu_2)=s^2+4s+16
$$

Després per equivalència

$$
\begin{cases} 6+K_{e1}=4 \Rightarrow K_{e1}=-2 \\ 6K_{e1}+11+K_{e2}=16 \Rightarrow K_{e2}=17 \end{cases}
$$

Mètode per fórmula d'Ackerman

$$Si\ \phi(s) = (s-\mu_1)(s-\mu_2) = s^2 + 4s + 16$$

Per tant $\phi(A) = \text{Abb}^2 + 4\text{Abb} + 16\text{I}$

$$K_e = \text{Abb}^2 + 4\text{Abb} + 16\text{I}\left[Wor\right]^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

$$K_e = \left(\begin{bmatrix}0 & 1\\-11 & -6\end{bmatrix}^2 + 4\begin{bmatrix}0 & 1\\-11 & -6\end{bmatrix} + 16\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \right) x \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$\Downarrow$

$$K_e = \begin{bmatrix}5 & -2\\22 & 17\end{bmatrix} x \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix}K_{e1}\\K_{e2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\17\end{bmatrix}$$

Mètode utilitzant Matlab

```
>>Aaa = [0];
>>Aab = [1 0];
>>Aba = [1;-6];
>>Abb = [0 1;-11 -6];
>>P = [-2+3.4641j  -2-3.4641j];

>>Ke = acker(Abb',Aab',P)'
Ke =
    -2
    17

>>Ke = place(Abb',Aab',P)'
Ke =
    -2
    17
```

Una vegada emprada la metodologia de càlcul de l'observador reduït, es farà un observador reduït a partir de les equacions i dels blocs "State Space" (tal com s'ha fet amb l'observador d'ordre complert).

Exemple 15:

Pols sistema: -2

Pols desitjats: -3 $\pm$ 0.5j

Sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Les realimentacions del sistema són les següents:

$$K = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Es fa una reducció del sistema (perquè una variable és mesurable (x1)) i s'obté:

$$\text{Aaa} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad \text{Aab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Aba} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{Abb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ba} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad \text{Bb} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les realimentacions de l'observador del nou sistema són (càlculs extrets del exemple anterior):

$$K_e = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Un cop obtinguts aquests paràmetres, es pot efectuar el muntatge de l'equació de l'observador per determinar-lo.

L'equació de l'observador és la següent:

$$\dot{\bar{X}}b = (Abb - K_e \cdot Aab) \cdot \bar{X}b + Aba \cdot Xa + Bb \cdot u + K_e \cdot (\dot{X}a - Aaa \cdot Xa - Ba \cdot u)$$

Es fa una transformació de les variables a les següents:

$$\dot{\bar{X}}b = \begin{bmatrix} \dot{\bar{X}}_2 \\ \dot{\bar{X}}_3 \end{bmatrix}, \ \bar{X}b = \begin{bmatrix} \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix} \text{ i } K_e \begin{bmatrix} K_{e1} \\ K_{e2} \end{bmatrix}$$

Obtenció del següent sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{X}}_2 \\ \dot{\bar{X}}_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot Xa + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u + \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} \cdot \dot{X}a$$

$\Downarrow$

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{X}}_2 \\ \dot{\bar{X}}_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ -28 & -6 \end{matrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} \cdot Xa + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u + \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix} \cdot \dot{X}a$$

Ara es munten les equacions per separat i s'obté:

$$\dot{\bar{X}}_2 = 2 \cdot \bar{X}_2 + 1 \cdot \bar{X}_3 + 1 \cdot + 0 \cdot u + (-2) \cdot \dot{X}a$$

$$\dot{\bar{X}}_3 = -28 \cdot \bar{X}_2 + (-6) \cdot \bar{X}_3 + (-6) \cdot Xa + 1 \cdot u + 17 \cdot \dot{X}a$$

Una vegada es tenen aquestes equacions, es pot muntar al Simulink tot l'esquema de l' observador reduït. Dóna com a resultat el següent:

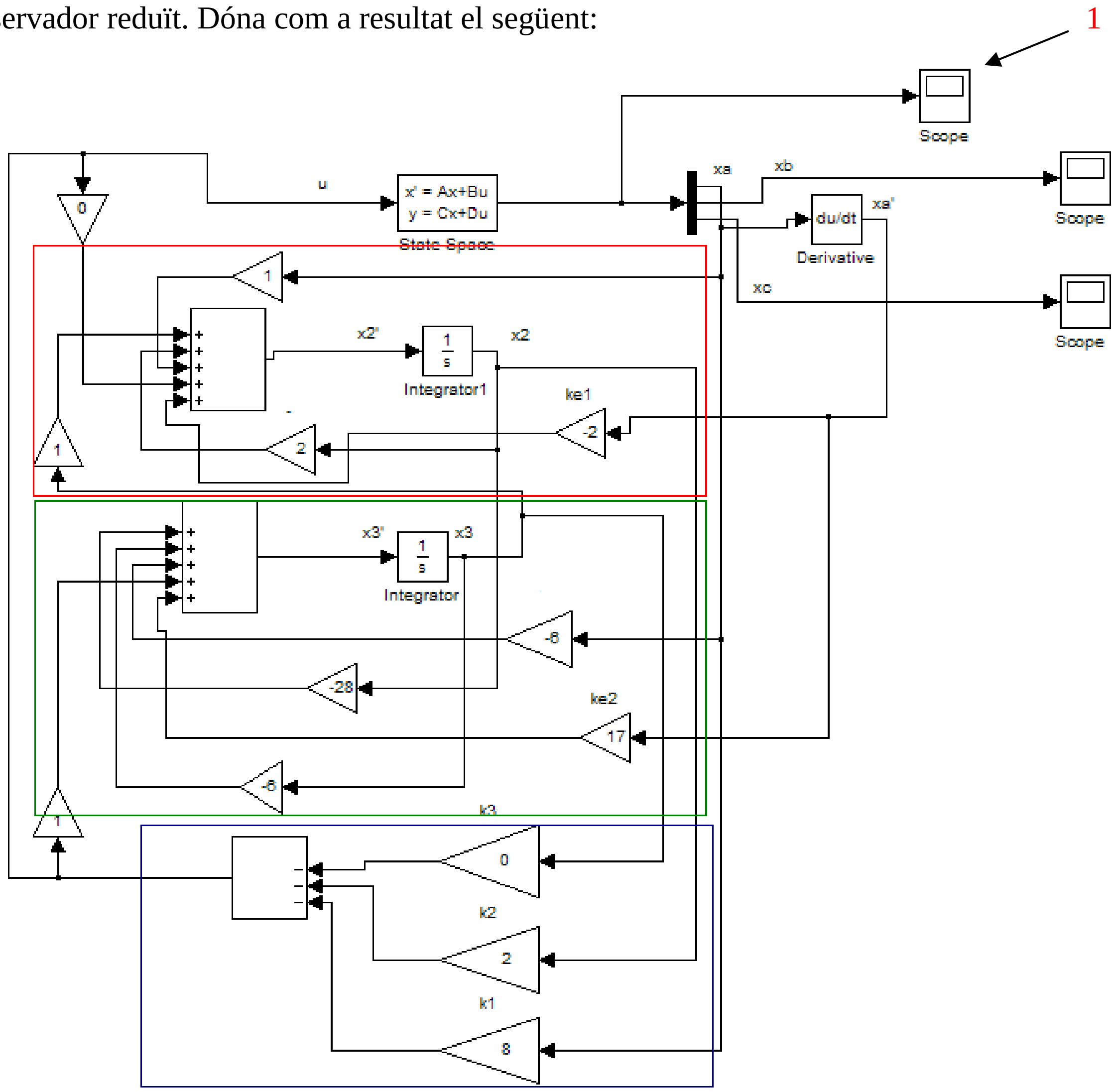


Figura XVIII. Muntatge al Simulink d'un sistema per retorn d'estat amb un observador d'ordre reduït.

<u>Quadrat vermell:</u> muntatge de l'equació de x_2

<u>Quadrat verd:</u> muntatge de l'equació de x_3

<u>Quadrat blau:</u> realimentacions del sistema (K)

I la resposta d’aquests sistema és la següent (1):

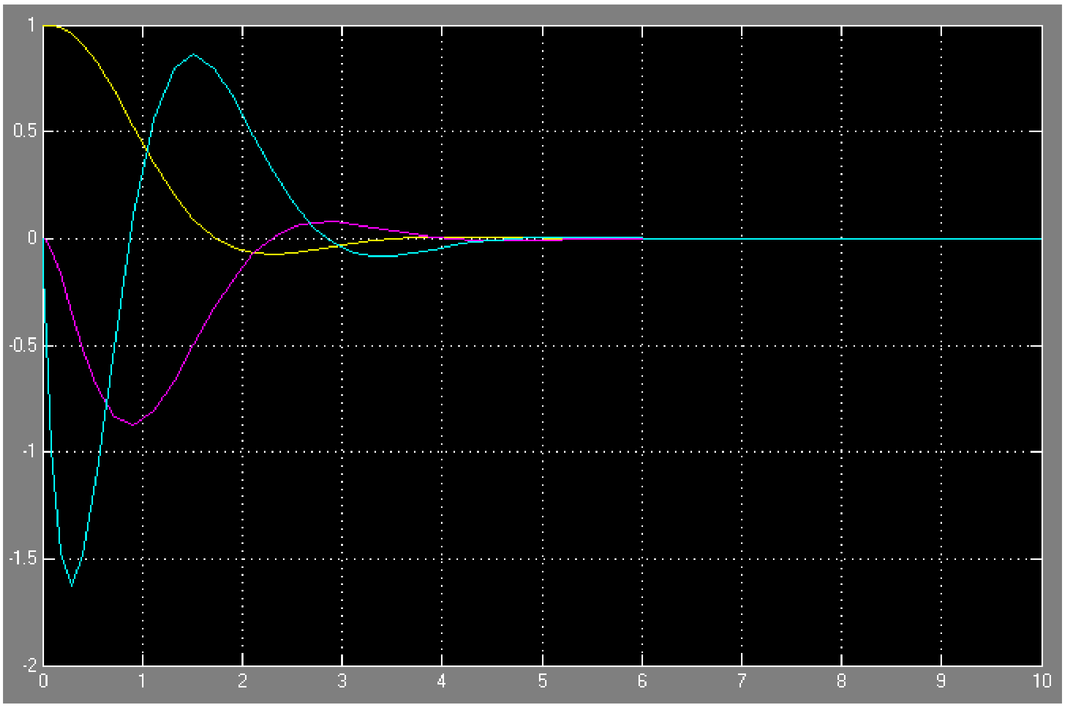


Figura XIX. Resposta temporal del sistema per retorn d’estat amb un observador d’ordre reduït. Senyal lila:x_b,senyal blau:x_c, senyal groc:x_a.

L’estabilització la podem considerar al voltant dels 6 segons. No hi ha moltes oscil·lacions abans que el sistema s’estabilitzi.

També es mostrarà, tal com s’ha fet en l’observador complert, que es poden introduir dins del “State-Space” de l’observador les realimentacions obtingudes per a l’observador amb els pols desitjats. Òbviament, la resposta serà la mateixa que en l’anterior gràfica.

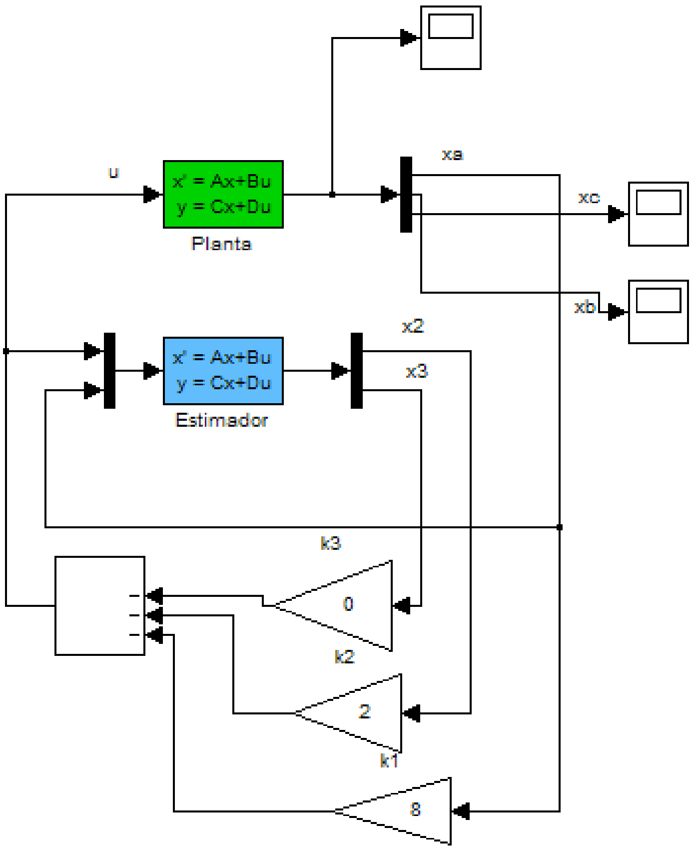


Figura XX. Muntatge Simulink amb els blocs "State-Space" amb observador d'ordre reduït.

5 Control d'un motor a partir de les variables d'estat

Una vegada definits els sistemes que hi ha per retorn d'estat amb les seves variants, i definits els diferents tipus d'observadors, a continuació es farà un control sobre un motor per buscar els seus paràmetres i construir les equacions d'estat. I finalment, sobre aquest motor es construirà un observador d'estat complert o reduït (depenent de les característiques del motor) per tal de veure el sistema.

El sistema a controlar serà el següent:

Motor

Control and Instrumentation (MECHANICAL UNIT 33-100). Està format per un motor+reductor (i adherit a aquests, un posicionador angular).La relació del reductor amb el motor és de 1/32 x motor RPM (una volta del reductor en són 32 del motor).

Feedback

Dispositiu de control, el qual permet utilitzar multitud de funcions (entrada esglaó, senyal quadrada, control velocitat, posició,etc.).

Control and Instrumentation (ANALOGUE UNIT 33-110). En aquesta aplicació, aquest dispositiu actua sobre les variables del sistema que es volen buscar (velocitat i precisió).

Pclab

Per obtenir la resposta del motor i visualitzar-ho a l'ordinador.

National Instruments PCI6014.

A partir d'aquests elements, el que s'ha de fer és muntar al Matlab un petit programa que proporcioni un esglaó, per tal de trobar els paràmetres del sistema.

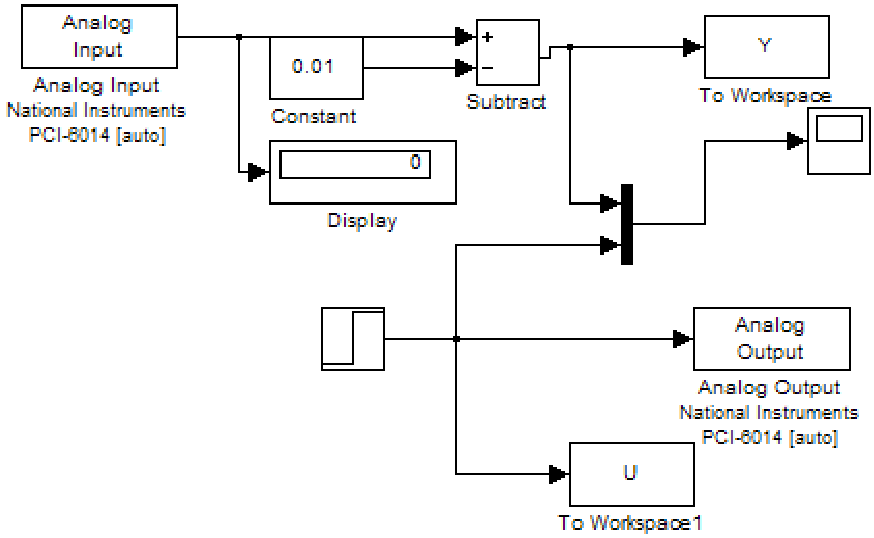


Figura XXI. Muntatge Simulink per trobar la resposta del motor.

I la resposta que s'obté és la següent:

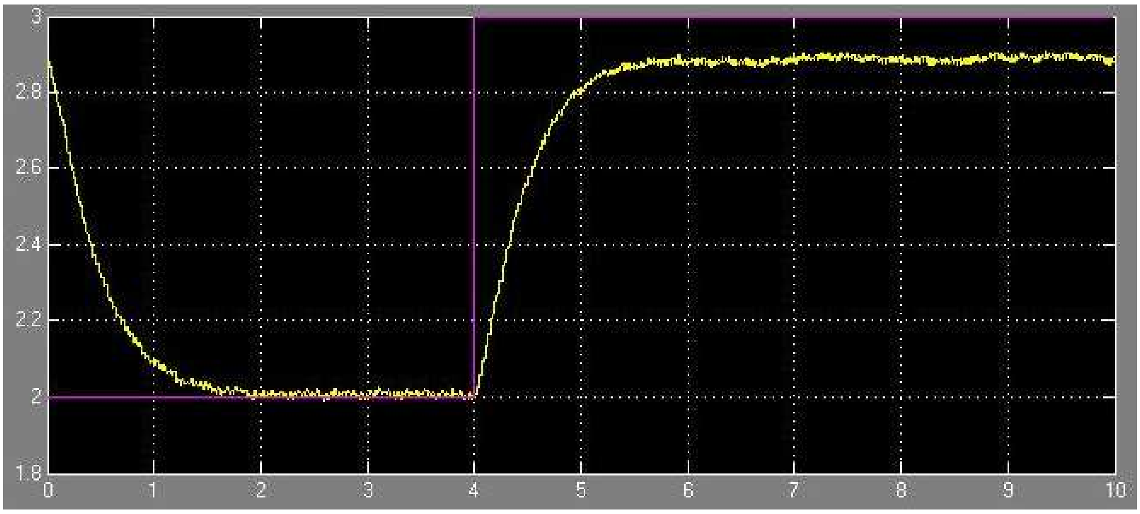


Figura XXII. Muntatge Simulink per trobar la resposta del motor.

A partir d'aquesta gràfica es pot determinar, en primer lloc, que és un sistema lineal amb entrada esglaó unitari (2 a 3) de primer ordre; i, segon, s'ha de poder trobar el valor de la constant τ (temps de la gràfica quan està al 63% de la pujada) i el guany K (diferència entre el valor màxim al qual arriba la gràfica respecte a la consigna establerta).

Constant de temps τ

Aproximadament té un valor de 0,5.

Guany K

Valor de la consigna: 5 quadrats de la gràfica

Valor de la resposta del motor: 4.5 quadrats de la gràfica.

$$K=\frac{4.5\ \text{quadrats}}{5\ \text{quadrats}}=\boxed{0.9}$$

Finalment l'equació del sistema és:

$$\frac{K}{\tau\cdot s+1}=\frac{0.9}{0.5\cdot s+1}$$

Ara que s'ha obtingut la resposta del sistema, es farà el muntatge general del sistema per començar a buscar els valors que es necessiten per trobar les equacions d'estat. Les incògnites del sistema bàsicament seran la velocitat del motor (ω) i la seva posició angular (θ).

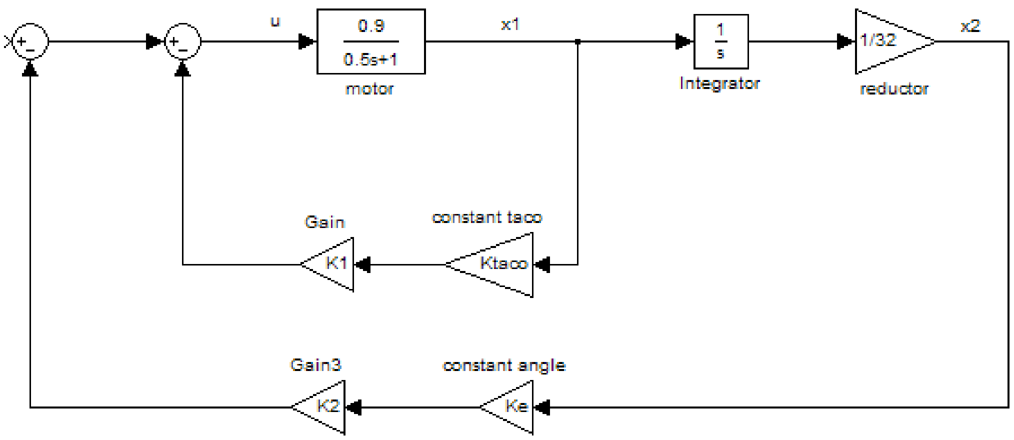


Figura XXIII. Muntatge Simulink del sistema real a controlar.

En aquest sistema falta per trobar les següents incògnites:

Ktaco: constant de la tacodinamo que va juntament amb el motor i que es trobarà mitjançant la relació tensió/(rev.(rad)/s). Es farà l'adquisició de diferents tensions per poder trobar una recta i així trobar el valor de Ktaco. S'haurà de tenir en compte que, quan busquem aquesta constant, s'haurà de multiplicar per 32, ja que la mesura que es farà serà des del reductor, i el reductor té una relació 1/32 respecte el motor (és a dir, quan el reductor fa una volta, el motor n'ha fet 32).

Kθ: constant de la posició angular. Es trobarà d'una manera molt semblant a la Ktaco, però ara s'establirà una relació de tensió/posició (rad). També es farà una adquisició de diferents valors per poder trobar la recta d'aquesta constant.

X1 és igual a la velocitat i x2 és la posició en la gràfica.

Recerca dels valors de Ktaco i Kθ.

Ktaco

Tensió (V)	voltes	segons	voltes/s	rad/s	(1/32)	K(taco)
1	3,75	20	0,1875	1,178097245	37,6991	0,0265
2	7,5	20	0,375	2,35619449	75,3982	0,0265
3	11,5	20	0,575	3,612831552	115,6106	0,0259
4	15	20	0,75	4,71238898	150,7964	0,0265
5	19	20	0,95	5,969026042	191,0088	0,0262
6	23,5	20	1,175	7,382742736	236,2478	0,0254
7	26,5	20	1,325	8,325220532	266,4071	0,0263
7,5	28	20	1,4	8,79645943	281,4867	0,0266

Com es pot veure, s'ha realitzat l'adquisició de 8 mostres. A continuació, s'ha mirat les voltes que es feien als 20 segons per cada mostra. S'ha dividit pel temps, passat a radiants, multiplicar per 32 (reductor) i, finalment, és trobat el valor de la constant per cada mostra (dividint la tensió amb el valor obtingut a la casella "1/32"). Una vegada es tenen aquests valors, se'n pot aconseguir la gràfica:

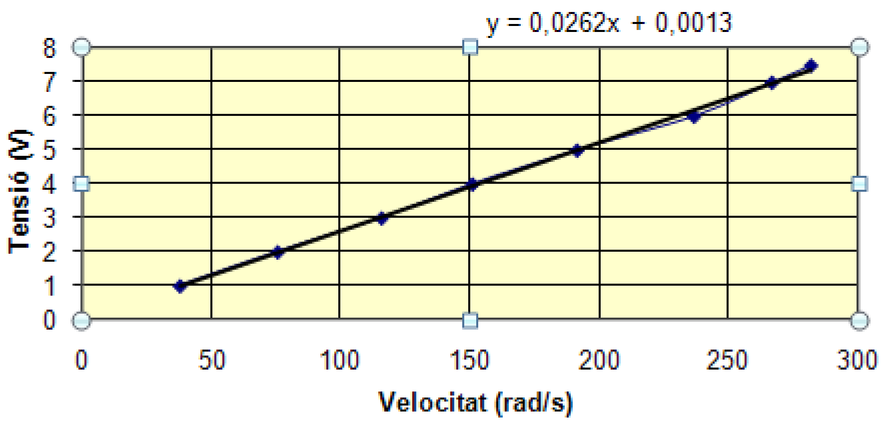


Figura XXIV. Gràfica de valors de la constant Ktaco.

El primer valor de l'equació de la recta dóna el valor de la Ktaco.

Per tant Ktaco=0.0262

Kθ

Tensió (V)	posició angular (graus)	posició ang. (rad)	Ke
1,02	15	0,261799388	3,8961
1,8	30	0,523598776	3,4377
2,59	45	0,785398163	3,2977
3,31	60	1,047197551	3,1608
4,09	75	1,308996939	3,1245
4,88	90	1,570796327	3,1067
5,65	105	1,832595715	3,0831
6,44	120	2,094395102	3,0749
7,23	135	2,35619449	3,0685
7,72	150	2,617993878	2,9488
7,77	160	2,792526803	2,7824

Com s'ha dit anteriorment, per trobar Kθ s'ha fet la relació entre tensió/posició (rad). la gràfica que s'obté és la següent:

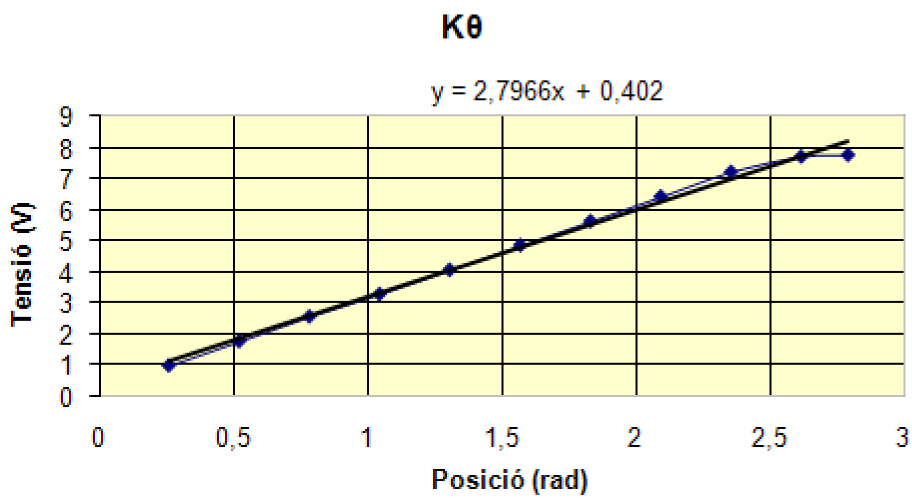


Figura XXV. Gràfica de valors de la constant Kθ.

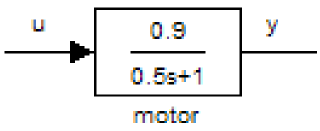
L'equació de la gràfica mostra el valor de Kθ (1 terme).

Kθ = 2.7966

Ara ja es tenen les incògnites que falten. Ara, ja es poden muntar les equacions per a cada paràmetre (velocitat i posició).

(Nota: quan s’obtinguin els valors de la realimentació d’estat del sistema (k1 i k2), s’haurà de multiplicar aquests valors per Ktaco i Kθ, respectivament).

Velocitat



$$\frac{y}{u} = \frac{K}{\tau\cdot s+1} \Rightarrow y\cdot(\tau\cdot s+1)=K\cdot u$$

$$\Downarrow$$

$$y\cdot\tau\cdot s + y = K\cdot u \Rightarrow \tau\,\dot{y}+y = K\cdot u$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{y} = \frac{K\cdot u}{\tau} - \frac{y}{\tau}$$

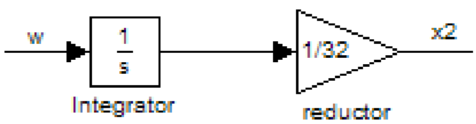
$$\dot{x}_1 = \dot{y}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\dot{x}_1 = \frac{K\cdot u}{\tau} - \frac{x_1}{\tau}\right]$$

S’obté la primera equació d’estat.

Posició



$$\int w = \theta \cdot \frac{1}{32}$$
$$\Downarrow$$
$$w = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{1}{32}$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{\theta} = 32 \cdot w \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{x}_2 ç$$
$$\Downarrow$$
$$\left[\dot{x}_2 = 32 \cdot x_1\right]$$

S'obté la segona equació d'estat.

Ara ja es pot muntar el sistema complert:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} = Ax+Bu \\ y = Cx \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Equació general}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\tau} & 0 \\ 32 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K}{\tau} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Se substiteixen pels valors corresponents i s'obtenen:

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 32 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.8 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array}}$$

Es farà la consideració que C=[0 1] per només veure una sortida (en aquests cas, la posició), tot i que en el muntatge Simulink s'utilitzaran les dues sortides per realimentar el sistema real.

Ara, s'haurà de comprovar si el sistema és totalment controlable i observable i, a partir d'aquí, es podran buscar uns pols per al sistema i després uns pols per a l'observador que es farà servir. Però abans d'això, s'efectuarà una discretització del sistema.

Matlab:

```
>> a=[-2 0;32 0];

>> b=[1.8;0];

>> c=[0 1];

>> d=[0;0];
```

S'utilitzarà un T_m de 0.05, ja que la tau del sistema és de 0.5 (10 vegades més ràpid).

Transformació a digital:

```
>> [g,h]=c2d(a,b,0.05)

g =

    0.9048        0

    1.5226        1.000

h =

    0.0856

    0.0697
```

<u>Controlabilitat:</u>

```
>> m=[h g*h];

>> rank (m)

ans =

    2
```

Això ens indica que el sistema és totalment controlable i, per tant, es poden posar uns pols arbitraris.

<u>Observabilitat:</u>

```
>> n=[c' g'*c'];

>> rank (n)

ans =

    2
```

El sistema és totalment observable. Es busquen les realimentacions del sistema:

pols del sistema: $0.8 \pm 0.05j$

Fent els càlculs propis (Matlab) s'obté el següent:

```
>> J=[0.8+0.05j 0;0 0.8-0.05j];

>> jj=poly (J);

>> phi=polyvalm(jj,g);

>> k=[0 1]*inv(m)*phi

k =

     3.3070          0.3101
```

Una vegada es tenen les realimentacions, s'han de multiplicar per Ktaco i Kθ en cada cas.

$k_1 = 3.370 \cdot 0.0262 = \underline{0.088294}$
$k_2 = 0.3101 \cdot 2.7966 = \underline{0.86722566}$

Aquests són els valors de les realimentacions del sistema finals. Es fa el muntatge i s'obté:

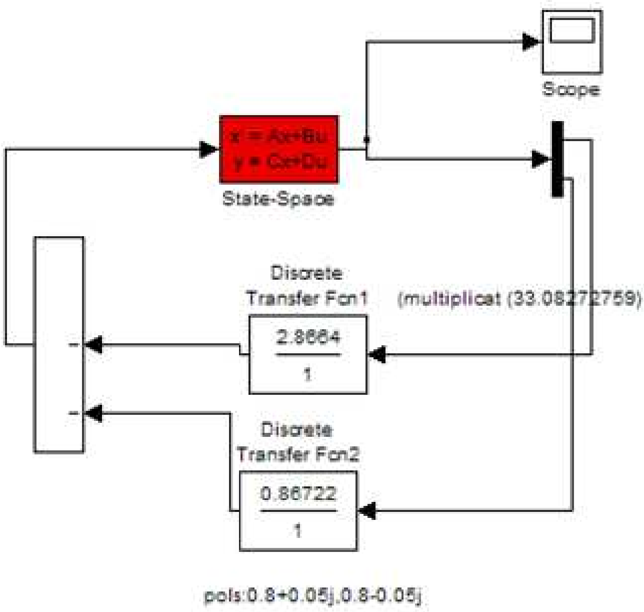


Figura XXVI. Esquema Simulink del sistema (motor) i les seves realimentacions.

La resposta que s'ha obtingut amb els pols que s'han trobat, inicialment era una resposta amb moltes oscil·lacions, però al voltant dels 12 segons s'estabilitzava. Per tal d'optimitzar aquestes oscil·lacions, s'han retocat lleugerament els valors dels pols de forma arbitrària per obtenir una resposta més estable. En aquests cas, s'ha multiplicat el valor inicial de k1 per 33, aproximadament, per obtenir el valor que apareix en l'esquema anterior.

I la seva resposta és la següent:

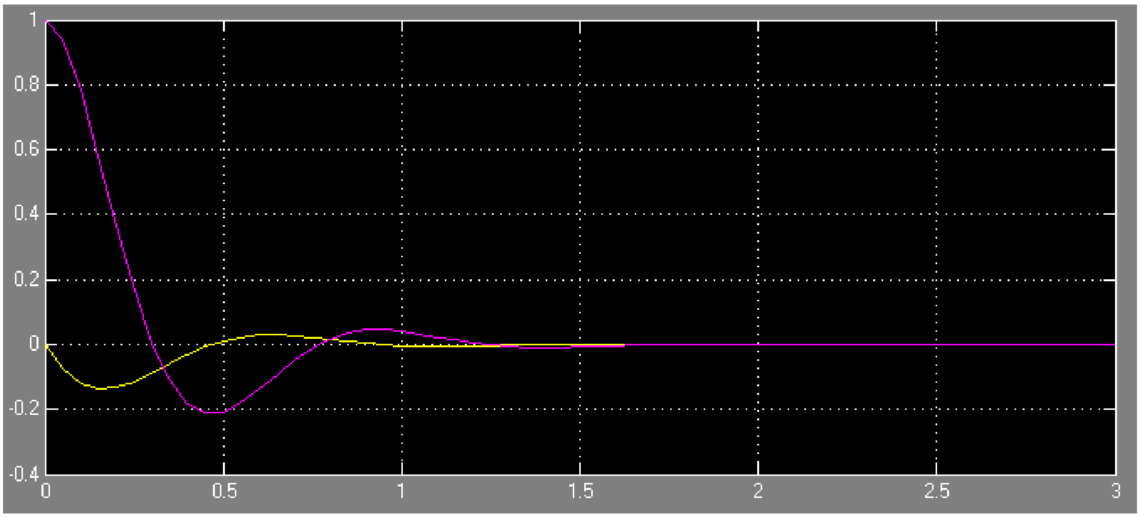


Figura XXVII. Resposta del sistema sobre el motor controlat per variables de retorn d'estat.

L'estabilització es produeix al voltant dels 1,5 segons. Com es pot comprovar, les oscil·lacions que hi ha són bastant petites; per tant, s'obté una resposta ràpida i, a més, l'estabilització es produeix també de forma ràpida.

Muntatge de l'observador:

pols del sistema: 0.3,0.2

Matlab:

```
p=[0.3;0.2];

>> ke= acker (g',c',p)'

ke =

    0.2800

    1.4048
```

$$k_1 = 0.2800 \cdot 0.0262 = \underline{0.007336}$$
$$k_2 = 1.4048 \cdot 2.7966 = \underline{3.928663}$$

Muntatge al Simulink:

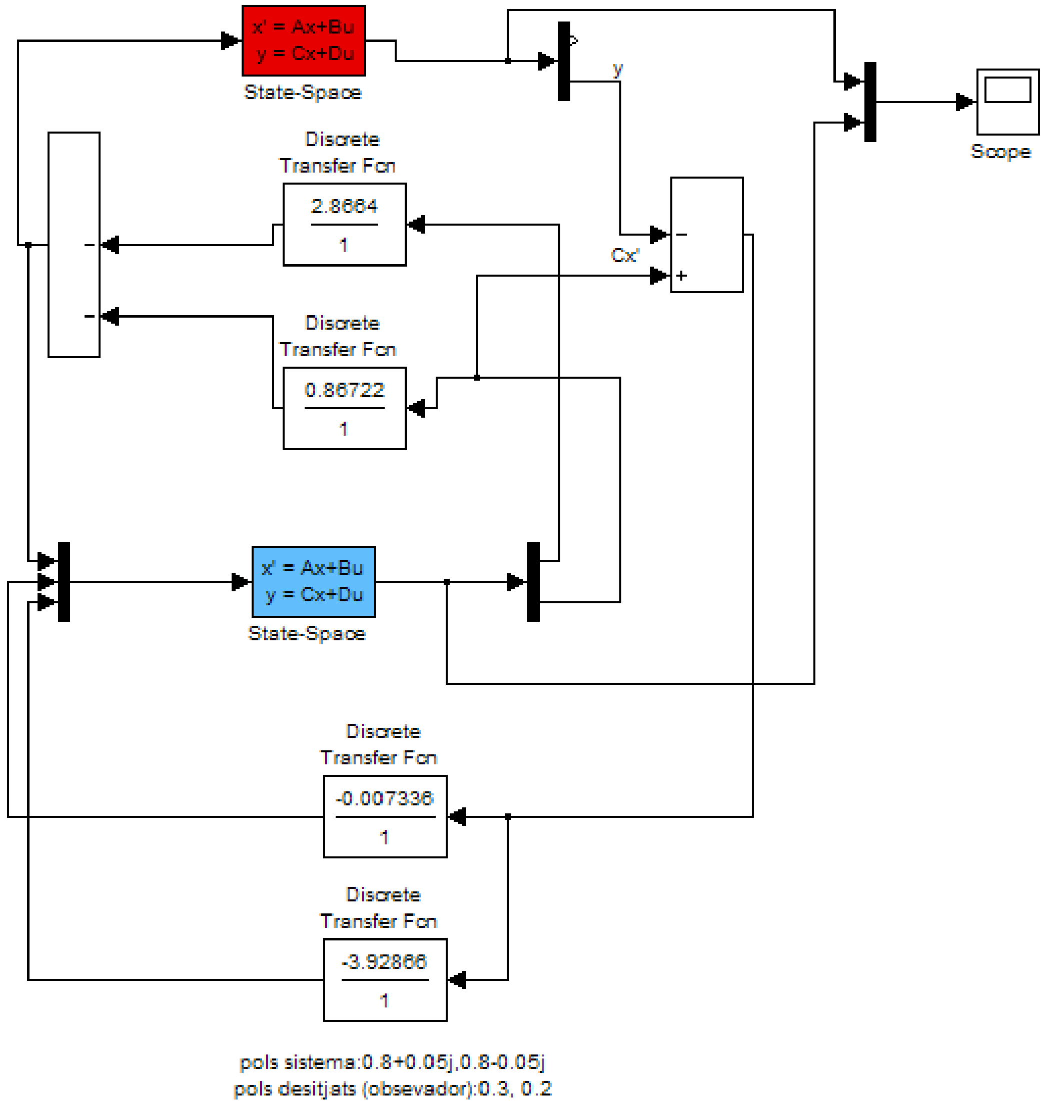


Figura XXVIII. Esquema Simulink del sistema per retorn d'estat (discret) i observador d'ordre complert.

I la resposta del sistema és la següent:

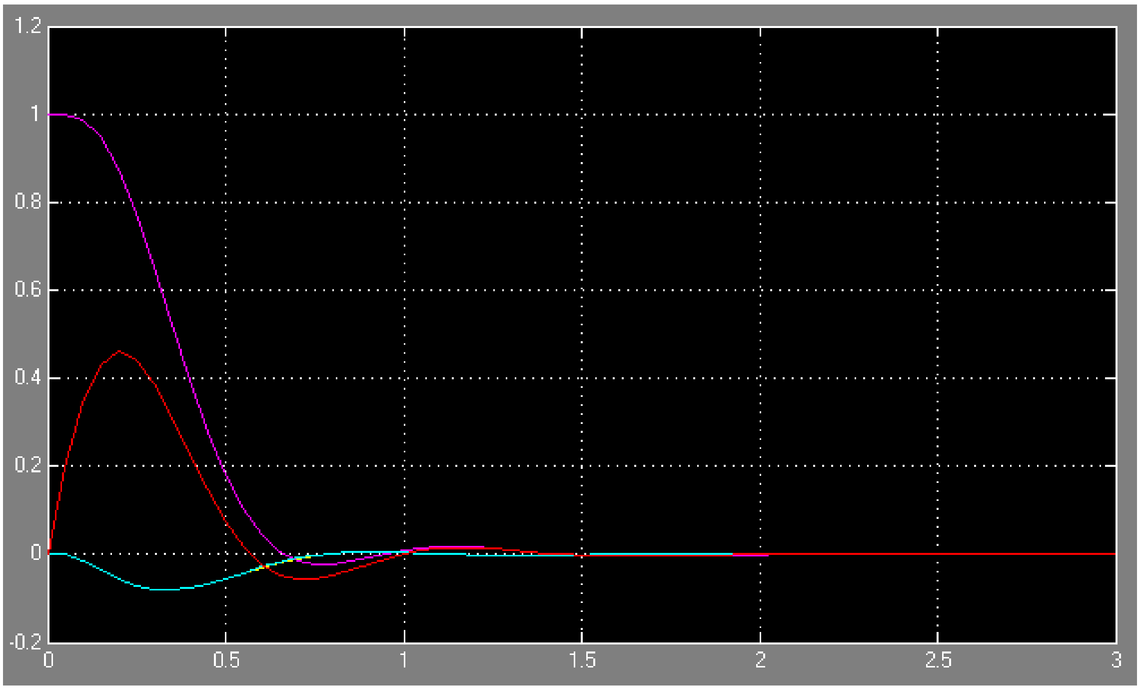


Figura XXIX. Temporal del sistema per retorn d'estat (discret) i observador d'ordre complert. Senyal blau i lila: sistema real, senyal groc i vermell: sistema observat.

En aquesta gràfica es pot veure com el senyal vermell (x2') va a buscar el senyal lila (x2), que té unes condicions inicials diferents (1). També es pot observar que el senyal vermell sempre va avançat respecte al senyal lila (lògic, té uns pols més ràpids). L'estabilització es realitza al voltant dels 1,5-1,6 segons.

Finalment, en cas que es volguessin incloure les realimentacions de l'observador en el "State-Space", es podria transformar a la nova equació de la següent forma:

$$\dot{x} = \left(A_{antiga} - B_{antiga} \cdot K_e\right) + B \cdot u$$

S'obtindrien les noves matrius, i simplement s'hauria de modificar el bloc "State-Space" de l' observador.

6 CONCLUSIONS

Les conclusions generals que he pogut extreure del projecte són les següents: s'ha pogut determinar el control d'un motor a partir dels paràmetres bàsics (variables per retorn d'estat) que té el sistema. En primer lloc, buscant les variables a partir de la resposta del sistema (la constant de temps, el guany K), quan s'entrava una consigna (esglaó unitari). Seguidament, determinant la "Ktaco" i la Kθ per poder trobar les realimentacions del sistema real. Finalment, muntant l'esquema al Matlab i trobant les realimentacions finals del sistema.

Així mateix, s'ha pogut obtenir un observador d'estat complert, buscant uns pols idonis (ràpids i estables) per al sistema, els quals ens mostren les evolucions de totes les variables. També s'ha pogut observar que el controlador, depenent dels seus pols, feia que la gràfica de l'observador variés, però sempre amb la filosofia de buscar el sistema real per poder avançar-se a ell i poder "observar-lo".

A nivell personal, aquest projecte ha estat per a mi un repte molt important, ja que no tenia un coneixement suficientment ampli del tema a desenvolupar en l'esmentat projecte, atès que l'assignatura impartida relacionada amb aquest matèria (Regulació Automàtica) no la vaig haver de cursar (convalidada per mòdul). Vaig començar pràcticament de zero el projecte i em vaig haver de sobreposar.

En aquests quatre mesos he adquirit, doncs, molts coneixements sobre aquesta vessant del control. M'he enriquit, tant pel que fa a la informació que he trobat als llibres de la biblioteca, com respecte a la informació que el meu professor ponent em proporcionava per tal de tirar endavant el meu projecte.

D'una banda, m'ha resultat una experiència molt costosa, perquè que havia d'adquirir i assimilar molta informació nova de forma ràpida en un temps curt; però d'altra banda, he anat assolint els coneixements i les habilitats necessàries per poder realitzar aquest projecte: tot i que l'eina Matlab l'havia utilitzat anteriorment, amb aquest projecte he pogut aprofundir més i he aprés moltes instruccions que desconeixia; de la mateixa manera, ProgramCC també m'ha proporcionat una altra alternativa a Matlab. També he pogut dissenyar i muntar observadors d'estat que em permetien visualitzar la resposta del sistema. Tot això, m’ha permès fer un control sobre un motor que era el principal objectiu del projecte.

Per tant, la meva valoració d’aquesta tasca és altament positiva, per tot el que m’ha aportat, tant a nivell de coneixements com a nivell de superació personal.

7 PRESSUPOST

Els costos dels projecte són únicament de personal. Per tant, simplement es pressupostaran les hores de dedicació de l'enginyer durant la consecució del projecte.

Les retribucions, segons les taules salarials revisades al 2009, un enginyer titulat de 1r cicle universitari anualment cobra 17038,62 € (és a dir, al mes cobra 1217,04 € (14 pagues)).Per tant, això significa que una hora d'un enginyer equival a 7.6065 (treballant les 40 hores setmanals). La taula següent ho mostra:

Categoria laboral	Retribució anual (€)	Mes x14(€)
Titulat 1r cicle universitari	17038.62	1217.04

Segons el XVè conveni col·lectiu, des de 2008 la jornada màxima anual és de 1806 hores. Per tant:

Retribució anual	Hores màximes anuals	Retribució horària d'enginyer
17038.62 €	1806 hores	9.43 €

Com que el projecte ha tingut una durada de 220 hores, llavors:

Hores emprades en el projecte	Salari net
230 hores	2168.9 €

Ara bé, l'empresa tindrà els següents costos:

Salari net	Costos empresa (impostos)
2168.9 €	2878.13 €

Així doncs, el cost total del pressupost ascendeix a 2878.13 €

8 Annex

-La informació que s’inclourà en els CD és la següent:

-Memòria del projecte (en format PDF).

-Program Matlab, juntament amb el seu manual d’usuari.

-Program CC.

-MathType.

-Article resum de la memòria

-Tots els esquemes utilitzats al Simulink

-Tota la documentació emprada per realitzar el projecte

9 Bibliografia

[1] Katsuhiko Ogata, *Designing linear control systems with MATLAB*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall 1994.

[2] Luis Moreno, *Ingeniería de control : modelado y control de sistemas dinámicos*,octubre de 2003.

[3] *Apunts de classe de Regulació Automàtica*, Enginyeria Tècnica Industrial,Escola Universitària Politècnica de Mataró,quadrimestre tardor 2008.

[4] Ministeri de treball i immigració, *Tablas salariales correspondientes al año 2009 del Convenio Colectivo Nacional de Empresas de Ingeniería y Oficinas de Estudios Técnicos*, Butlletí Oficial de l'Estat, 28 de de març de 2009, núm. 75.

10 Webgrafia

[5] http://www.galeon.com/hamd/pdf/observadores.pdf, Henry Mendiburu Diaz, *Diseño de observadores de estado*.

[6] http://books.google.es/books?id=DDcUaVBL-XUC&dq=observador+de+orden+reducido&source=gbs_navlinks_s, José Gómez Campomanes, Universidad de Oviedo,*Sistemas digitales de control: análisis y diseño*, Universidad de Oviedo, 1998.

[7] http://www.monografias.com/trabajos32/sistemas-de-control/sistemas-de-control.shtml,**Nabil El Halabi**, ***Sistemas de ControlGanancias de Realimentación y Observadores de Estado***, Diciembre 2004.